Majme danú kontextovú gramatiku G. Zostrojte lineárne ohranicený automat (LBA) A taký, ze L(G)=L(A). Pri simulácii pouzite spätné odvodenie (teda postupne na páske robíte spätne kroky az kým sa nedostanete ku σ)
- Pri dôkaze pouzite matematickú indukciu -

Nech G=(N,T,P,σ).
N - Mnozina neterminálov
T - Mnozina terminalov
P - Pravidlá
σ - Pociatocný neterminál

A=(K,Σ,Γ,δ,q0,F)
K - Konecná mnozina stavov
Σ – Abeceda vstupných symbolov Σ=T
Γ - Abeceda pracovných symbolov Γ=N U T U {%,¢,$)
q_0 - pociatocný stav
F - mnozina akceptacných stavov F={q_k}

Automat konštruujem tak, aby simuloval jednotlivé kroky v gramatike G. Ale kedze velkost pásky je ohranicený vstupným slovom, automat nemôze simulovat kroky v rovnakom poradí (lebo vstupne slovo je σ (má dízku 1), a výstupné slovo môze byt aj dlhší) . Preto automat A dostane slovo z L(G), bude na nom robit kroky v spätnom poradí, a slovo akceptuje vtedy, ak sa dostane ku pociatocnemu neteminálu.
(teda automat pravidlo AB→CDE simuluje tak, ze v slove CDE vymeni na AB.)

Automat funguje takto:

1. Nedetministicky uhadne, ktoré pravidlo bolo pouzité ako posledné pri odvodení vetnej formy
2. Otestuje pravidlo. Ak ho uhadol spravne, prepise pravú stranu daného pravidla lavou stranou. (kedze lavá strana je kratsia, zvysok vymení na neutralný symbol).
3. Neutrálne symboly posunie na koniec slova,
4. Automat akceptuje slovo typu: ¢σ%*$ (Automat akceptuje stavom) (% je neutr. sym.)
5. Ak slovo nebolo akceptované vráti sa ku 1.

Konkrétne:
(kazdý krok ukazem aj na priklade: AB→CDEF (pravidlo c.1)

(A) Na páske môzeme pohybovat v oboch smeroch.
$\delta(q_0,a)\to(q_0,a,1)$ *// $a \in \Gamma$*
$\delta(q_0,a)\to(q_0,a,-1)$

(B) Uhádneme pravidlo:
$\delta(q_0,a)\to(q_{n,1},a,0)$; *// n je císlo pravidla*

(C) Pouz. pravidlo:
$\delta(q_{n,x},bx)\to(q_{n,x+1},ax,1)$ *// $a_1a_2....a_n \to b_1b_2.....b_m$ je pravidlo v G*
// x je cislo kroku

$\delta(q_{1,1},C) \to (q_{1,2},A,1)$
$\delta(q_{1,2},D) \to (q_{1,3},B,1)$

$\delta(q_{1,3},E) \to (q_{1,4},\%,1)$
$\delta(q_{1,4},F) \to (q_0,\%,0)$

(D) Neutrálne symboly (%) posunieme na koniec slova

$\delta(q_0,\%)\to(q_{a,\%},a,1)$ *// tieto pravidlá potrebujeme pre kazdé $a \in \Gamma$*
$\delta(q_{a,\%},a)\to(q_{0,\%},0)$

$\delta(q_0,\%)\to(q_{A,\%},A,1)$
$\delta(q_A,A)\to(q_{0,\%},0)$
$\delta(q_0,\%)\to(q_{B,\%},B,1)$
$\delta(q_B,B)\to(q_{0,\%},0)$
...

(E) Skontrolujeme, ci na páske mame iba ¢σ%*$ - ak áno, prejdeme do akceptacneho stavu.

$\delta(q_0,¢)\to(q_{t,1},¢,1)$ *// prvý symbol musí byt ¢*
$\delta(q_{t,1},\sigma)\to(q_{t,2},\sigma,1)$ *// druhý symbol musí byt σ*
$\delta(q_{t,2},\%)\to(q_{t,2},\%,1)$ *// ostatné musia byt %*
$\delta(q_{t,2},\$)\to(q_k,\$,0)$ *// q_k je akceptacný stav, ak precíta $, prejde do q*

Dôkaz:

1. $L(G) \subseteq L(A)$ - Teda kazdé slovo vygenerovaný gramatikou G, akceptuje automat A

Dokazem to indukciou... (indukcia vzhladom na dlzku odvodenia)
nech slovo $w \in L(G)$, a ma odvodenie v gramatike:
$\delta \to w_1 \to w_2 \to w_3 \to w_4 \to ..... \to w_n \to w_{n+1} \to w$ // $\delta=w_0$; $w=w_{n+2}$

(1) Automat akceptuje slovo δ
to zrejme platí, lebo slovo má tvar ¢σ%*$, a také slovo automat akceptuje (E)

(2) treba dokázat, ze ak automat zo slova w_n moze dostat slovo δ, môze dostat to aj zo slova w_{n+1};
ale kedze slovo w_{n+1} sme dostali v G zo slova w_n (pouzili sme na to pravidlo p), ak automat ma slovo w_{n+1}, vie z toho vyrobit w_n - vyplíva to práve z konstrukcii automatu (lebo automat simuluje kazdé pravidlo z G), staci na slovo w_{n+1} aplikovat tie casti δ, ktoré sme dostali v **(C)** z pravidla p.

(3) Dôsledok: automat akceptuje slovo w, lebo vie zo slova w vyrobit δ.

- este je tu otázka abecedy: Abeceda vstupných symbolov automatu sú terminály gramatiky G, a vieme, ze v slove w môzu byt iba terminály → vsetko je v poriadku.

(Pri dôkaze som pouzil vlastnosti automatu:
- Pomocou **(D)** môzem posúvat symboly % na koniec slova
(teda akoby symboly % ani tam neboly)
- automat kazdé pravidlo simuluje zvlást)

2. $L(A) \subseteq L(G)$ - Slovo, akceptovaný automatom A, generuje aj gramatika G.

Nech $w \in L(A)$
Potom existuje výpocet:
$(q_0,w,k) \perp^* (q_0,¢\sigma\%^*\$,l)$ *// k,l nie su dôlezité, lebo automat pomocou **(1)***
// môze na páske pohybovat v oboch smeroch.
// dalej vynechám $\%^*$ - neovplivní výpocet

Výpocet rozpísem na kroky, kde automat je v q_0.

$(q_0,w,k) \perp^* (q_0,w_1,k_1) \perp^* (q_0,w_2,k_2) \perp^* \dots (q_0,w_n,k_n) \perp^* (q_0,¢\sigma\$,l)$. // $¢\sigma\$=w_{n+1}$

Teraz dokázem, pre kazdý výpocet $(q_0,w_m,k_m) \perp^* (q_0,w_{m+1},k_{m+1})$ existuje v gramatike G odvodenie $w_{m+1} \rightarrow w_m$

prezkumam moznosti, ako v automate mozem dostat zo stavu q0 do stavu q0.

1. Pomocou **(A)**
   v tomto prípade $w_m=w_{m+1}$, teda v G ex. odvodenie $w_{m+1} \rightarrow w_m$

2. Pomocou **(D)**
   v tomto pripade $w_m=w_{m+1}$, lebo neutr. symboly v nasom vypocte nie su dôlezité. Tiez existuje odvodenie v G, $w_{m+1} \rightarrow w_m$

3. Pomocou **(B)** uhadneme pravidlo, prejdem do $q_{n,1}$, a pomocou **(C)** prejdem z $q_{n,1}$ cez $q_{n,2}$, $q_{n,3}$ ... $q_{n,m}$ do q_0, ale z konstrukcie automatu vyplíva, ze to viem urobyt iba vtedy, ak plati, ze v G existuje odvodenie: $w_{m+1} \rightarrow w_m$ - a pritom pouz. pravidlo cislo n.

Kedze pre kazdý výpocet $(q_0,w_m,k_m) \perp^* (q_0,w_{m+1},k_{m+1})$ existuje v gramatike G odvodenie wm+1$\rightarrow$ wm, existuje aj pre vypocet $(q_0,w,k) \perp^* (q_0,¢\sigma\$,l)$ odvodenie v G, $\sigma \rightarrow w$, a to znamená,. ze $w \in L(G)$.

Ak pre vsetky $w \in L(A)$ platí, ze $w \in L(G)$, to znamená ze $L(A) \subseteq L(G)$ - co bolo treba dokázat.