Autor:Marcel Fačkovec

Uloha 7.3.:Pomocou jazykov platných výpočtov dokážte, že problém $L(G)=\sum^*$ je pre bezkontextové jazyky nerozhodnuteľný.

Poznámka:Kedže rekurzívne vyčísliteľné jazyky sa dajú algoritmicky previesť na TSje, tak v ďalšom texte uvažujem len o TS.

Definícia: Ak A je TS ,tak jazyk platných výpočtov je $L_{pv}(A)=\{w\in\sum_{pv}=\{\Gamma\cup K\cup\{\#\}\}^* |$ $w=u_0\#u_1^{\,r}\#.....\#u_n^{\,r \text{ na } (n+1) \bmod 2}$ kde u_0 je počiatočná konfigurácia, u_n je akceptačná konfigurácia a $\forall i\in\{0,n-1\}\ u_i|\!-u_{i+1}\}$.

Definícia: $L_{npv}(A)=L_{pv}(A)^c$

Lema1:$L(A)=\varnothing \Leftrightarrow L_{pv}(A)=\varnothing$, kde A je TS.

Dôkaz:Ak $L(A)=\varnothing$ tak neexistuje, takýto výpočet:
$u_0|\!-u_1|\!-....|\!-u_n$, kde u_0 je počiatočná konfigurácia,u_n je akceptačná konfigurácia TS A.
To znamená, že $L_{pv}(A)=\varnothing$.
Ak $L_{pv}(A)=\varnothing$, tak neexistuje výpočet takýto: $u_0|\!-u_1|\!-....|\!-u_n$, kde u_0 je počiatočná konfigurácia,u_n je akceptačná konfigurácia TS A.To znamená,že neexistuje slovo také, že ak by bolo na vsupe automatu A, tak by sa dostal z počiatočnej konfigurácie do akceptačnej.Čiže $L(A)=\varnothing$.

Dôsledok: $L(A)=\varnothing \Leftrightarrow L_{pv}(A)=\varnothing \Leftrightarrow L_{npv}(A)=\sum_{pv}^*$.

Veta:Či $L(A)=\varnothing$ je pre Turingove stroje nerozhodnuteľný problém.

Lema2:Pre daný TS A $\exists$ bezkontextová gramatika G taká, že $L(G)=L_{npv}(A)$.

Dôkaz:
Majme daný TS $A=(K,\sum,\Gamma,d,g_0,F)$.
Konfigurácie TS:$KB\Gamma^*,\Gamma^*K\Gamma^*,\Gamma^*KB$
Nech $B\in\Gamma$ ale nedá sa zapisovať
$L_{npv}(A)=\{ w\in\sum_{npv}=\{\Gamma\cup K\cup\{\#\}\}^* | w\neq u_0\#u_1^{\,r}\#.....\#u_n^{\,r \text{ na } (n+1) \bmod 2}$ u_0 je počiatočná konfigurácia, u_n je akceptačná konfigurácia,$u_i|\!-u_{i+1}$ $i\in\{0,n-1\}\}$

Ak $w\in L_{npv}(A)$ tak je to slovo z $\sum_{npv}^*$ také, že:
1) buď niektoré z u_i nie je konfigurácia
(u_i je prázdna alebo nie je tam stav alebo je tam viac ako 1 stav alebo blank je na zlom mieste)
2) u_0 nie je počiatočná konfigurácia
(g nie je počiatočný stav alebo g_0 nie je na začiatku konfigurácie alebo je tam pracovný symbol)
3) u_n nie je akceptačná konfigurácia
4) niekde neplatí $u_i|\!-u_{i+1}$
(ak čítacie hlavy v u_i a u_{i+1} sa odlišujú o 1 pozíciu, tak neexistuje delta funkcia taká, že z $u_i|\!-u_{i+1}$ alebo sa čítacie hlavy v u_i a u_{i+1} sa odlišujú aspoň o 2 pozície alebo rozdiel v dlzkach u_i a u_{i+1} je väčší ako 1)
$G=(\ ,\sum_{npv},P,S)$

$S \rightarrow S_v$ -vygeneruje slovo z $\sum_{npv}^*$, kde je aspoň jeden #

$S \rightarrow S_1$ -vygeneruje slovo z $\sum_{npv}^*$, kde nie je #

$S_v \rightarrow S_k \mid S_p \mid S_A \mid S_u$ -vygenerujú slovo z $\sum_{npv}^*$ pre ktoré platia postupne vlastnosti 1) až 4)

$\forall x \in \sum$ $S_w \rightarrow x\ S_w \mid \varepsilon$ - vygeneruje slovo z $\sum^*$

$\forall x \in \sum_{npv}$ $N \rightarrow xN \mid \varepsilon$ - vygeneruje slovo z $\sum_{npv}^*$

$\forall x \in \Gamma$ $P \rightarrow x\ P \mid \varepsilon$ - vygeneruje slovo zo Γ

$\forall x \in \Gamma \cup K$ $P_s \rightarrow x\ P_s \mid \varepsilon$ - vygeneruje slovo zo Γ a stavov

$B_r \rightarrow BB_r \mid \varepsilon$ -vygeneruje slovo z blankov

1)$S_k \rightarrow \#N \mid N\# \mid N\#\#N$ -vygeneruje slovo z $\sum_{npv}^*$,kde je nejaká konfigurácia prázdna

$S_k \rightarrow P\#N \mid N\#P \mid N\#P\#N$ -vygeneruje slovo z $\sum_{npv}^*$,kde je konfigurácia v ktorej nie je žiadny stav

$S_k \rightarrow A_2\#N \mid N\#A_2 \mid N\#A_2\#N$ -vygeneruje slovo z $\sum_{npv}^*$,kde je konfigurácia v ktorej sú aspoň 2 stavy

$\forall g_1, g_2 \in K$ $A_2 \rightarrow Pg_1Pg_2P_s$ -vygeneruje slovo z Γ a s aspoň dvoma stavmi

Konfigurácie TS:$KB\Gamma^*, \Gamma^*K\Gamma^*, \Gamma^*KB$

$S_k \rightarrow B_k\#N \mid N\#B_k \mid N\#B_k\#N$ -vygeneruje slovo z $\sum_{npv}^*$,kde je konfigurácia v ktorej sú blanky na zlých miestach

$\forall x \in \Gamma\text{-}B\ \forall y \in \Gamma\text{-}B \cup K$ $B_0 \rightarrow B_rxP_sBP_syB_r$- v konfigurácii je aspoň jeden blank za pracovným

$\forall g \in K$ $B_1 \rightarrow B_rgBBP_s$ -v konfigurácii sú za stavom aspoň 2 blanky

$B_2 \rightarrow B_rBP_s$ -v konfigurácii sú na začiatku blanky

$\forall x \in \Gamma\text{-}B$ $B_3 \rightarrow P_sxBB_r$ -v konfigurácii sú na konci za nepracovnýmsymbolom blanky

$B_4 \rightarrow P_sBBB_1$ -v konfigurácii sú na konci aspoň dva blanky

2)$S_p \rightarrow Z_{g0}\#N$ -vygeneruje slovo z $\sum_{npv}^*$, kde prvá konfigurácia nebude počiatočná

$Z_{g0} \rightarrow Z_1 \mid Z_2 \mid Z_3$ -vytvorí počiatočnú konfiguráciu kde bude nejaká chyba

$\forall g \in K\text{-}F$ $Z_1 \rightarrow PgP$ - počiatočná konfigurácia, kde je nepočiatočný stav

$\forall x \in \Gamma$ $Z_2 \rightarrow xP_s$ - počiatočná konfigurácia, kde g_0 nie je na začiatku

$\forall x \in \Gamma\text{-}\sum$ $Z_3 \rightarrow P_sxP_s$ - počiatočná konfigurácia, kde je pracovný symbol

3)$S_A \rightarrow N\#Z_{gf}$

$\forall\ g \in K\text{-}F$ $Z_{gf} \rightarrow PgP$

4)$S_u \rightarrow N\#K\#N \mid K\#N \mid N\#K \mid K$ -dvojica konfigurácií sa nachádza na rozličných miestach

$K \rightarrow K_0 \mid K_4 \mid K_5 \mid K_6$- K_0 zabezpečí, aby sa čítacie hlavy v u_i a u_{i+1} odlišovali o 1 pozíciu, a aby neexistovala delta funkcia taká, že z $u_i \mid\!- u_{i+1}$

K_4 zabezpečí, aby sa čítacie hlavy v u_i a u_{i+1} sa odlišovali aspoň pozície)

K_5 zabezpečí, aby bol rozdiel v dĺžke u_i , u_{i+1} väčší ako 1.

K_6 zabezpečí,že sa u_i , u_{i+1} budú líšiť aspoň o jedno písmeno na mieste kde nemôže byť na u_i aplikovaná delta funkcia.

$\forall x,y \in \Gamma$ $K_0 \rightarrow x\ K_0y \mid K_1 \mid K_2 \mid K_3$ -vygeneruje začiatky obidvoch konfigurácií

$\forall\ g,p \in K\ \forall\ a,b \in \Gamma$ také, že $(p,b,0) \notin d(g,a)$ $K_1 \rightarrow gaK_zbp \mid agK_zpb$

$\forall\ g,p \in K\ \forall\ a,b \in \Gamma$ také, že $(p,b,1) \notin d(g,a)$ $K_2 \rightarrow gaK_zpb \mid agK_zbp$

$\forall\ g,p \in K\ \forall\ a,b,c \in \Gamma$ také, že $(p,b,-1) \notin d(g,a)$ $K_3 \rightarrow cgaK_zbcp \mid agcK_zpcb$

K_1, K_2, K_3-v prvej konfigurácii sa bude nachádzať stav, v druhej sa bude nachádzať najviac o jednu pozíciu inde. Pričom nesmie platiť aby sa dalo $u_i \mid\!- u_{i+1}$.

Sú rozlišované 2 prípady: $u_i\#u_{i+1}^R$, $u_i^r\#u_{i+1}$

napr: $u_i = xgay$, $u_{i+1} = xpby$

ak $u_i\#u_{i+1}^R$, tak $xgay\#ybpx$

teda nemôže platiť $(p,b,0) \in d(g,a)$ lebo inac by sa dalo $u_i \mid\!- u_{i+1}$.

$K_z \rightarrow$ P#P-dogeneruje slová u_i, u_{i+1}

$\forall x,y \in \Gamma$ $K_6 \rightarrow x\ K_6 y \mid K_p \mid K_k$ - u_i , u_{i+1} budú líšiť aspoň o jedno písmeno na mieste kde nemôže byť na u_i aplikovaná delta funkcia

$\forall x,y \in \Gamma \cap x \neq y\ \ \forall g,p \in K\ \forall a,b \in \Gamma$

$K_p \rightarrow xP_s\#P_s y \mid xgaP_s\#P_s byp \mid xR_d y$ -pokazí rovnosť u_i , u_{i+1} pred stavom g v u_i

$\forall x,y,a \in \Gamma\ g \in K\ x_1,y_1 \in \Gamma \cup K\ R_d \rightarrow xR_d y \mid agP_s\#P_s x_1 y_1$- pokazí rovnosť u_i , u_{i+1} ak bolo reverz

$\forall g \in K\ \forall a,c,c_1,c_2 \in \Gamma\ \ \forall x,y,z \in \Gamma \cup K\ \ c_1 \neq c_2$

$K_k \rightarrow gaK_m xy \mid cgaK_m xyz \mid agK_m xy \mid agcK_m xyz \mid agc1K_m xc2z$

-zisti že je na mieste kde môže byť použita delta a ide ďalej.

$\forall x,y,x_1,y_1 \in \Gamma \cap x_1 \neq y_1\ K_m \rightarrow xK_m y \mid x_1P_s\#P_s y_1$-pokazí rovnost u_i , u_{i+1} po mieste kde mohla byť použita delta

$\forall x,y \in \Gamma\ K_4 \rightarrow x\ K_4 y \mid K_{s1} \mid K_{s2}$ -vytvorí začiatky slov u_i, u_{i+1}

$\forall x,y,z \in \Gamma\ \forall g \in K\ K_{s1} \rightarrow gxP\#Pyz$ -najskôr bude čítacia hlava v u_i a aspoň o 2 miesta dalej v u_{i+1}

$\forall x,y,z \in \Gamma\ \forall g \in K\ K_{s2} \rightarrow yzP\#Pxg$ -najskôr bude čítacia hlava v u_{i+1} a aspoň o 2 miesta dalej v u_i

$\forall\ x,y \in \Gamma \cup K\ K_5 \rightarrow xyP_s R \mid RP_s xy$ -rozhodne sa či bude u_i alebo u_{i+1} dlhsie

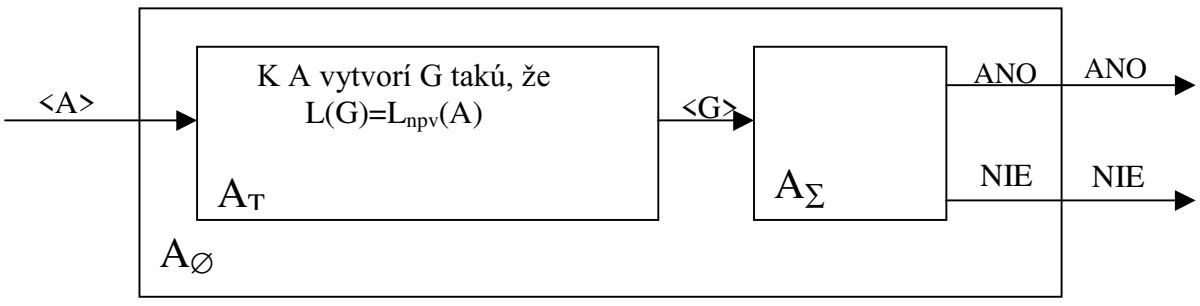
$\forall\ x,y \in \Gamma \cup K\ R \rightarrow xRy \mid \#$ -vytvorí slová rovnakej dĺžky

$S_1 \rightarrow \varepsilon \mid A_2 \mid P \mid PgP \mid B_K$ -vytvorý jednu konfiguráciu ktorá bude chybná.

Platí, že $L(G)=L_{npv}(A)$.
Pretože každé slovo z L(G) spĺňa body 1 až 4 a nepatrí do $L_{pv}(A)$.
Platí,že $L_{npv}(A) \subseteq L(G)$, pretože lubovolné slovo z $L_{npv}(A)$ spĺňa nejaký bod z 1 až 4,ktoré platia aj pre L(G).
Teda $L(G)=L_{npv}(A)$.

Gramatika G je bezkontextová, preto $L_{npv}(A) \in L_{cf}$.

Dôkaz úlohy 7.3:
Sporom.
Predpokladám, že problém $L(G)=\Sigma^*$ je pre bezkontextové jazyky rozhodnuteľný.
To znamená, že $\exists$ det. TS A_Σ, ktorý určí pre danú bezkontextovú gramatiku či $L(G) = \Sigma^*$.
Ukážem, že potom sa dá pomocou $A_\varnothing$ rozhodnúť aj problém či $L(A)=\varnothing$ pre ľubovolný TS A.



TS $A_\varnothing$ funguje takto: Na vstup dostane kód TS <A>.Tento kód je potom transformovaný , pomocou det. TS A_T, ktorý vždy zastaví, na gramatiku G.Pre túto gramatiku platí, že $L(G)=L_{npv}(A)$.
TS A_T pracuje takto: Dostane na vstup <A>.Ak nie je kód správny, tak sa zasekne.Ináč dá za kód # a vytvorí gramatiku G, podľa tvaru z lemy 2.Jej kód dá za # a zmaže potom

<A> aj #.Na záver nastaví čítaciu hlavu na začiatok <G> a prejde do akceptačného stavu. <G> bude vstup pre A_{Σ}.Ten ak odpovie áno,tak $L(A)=\emptyset$, pretože $L(A)=\emptyset \Leftrightarrow L_{pv}(A)=\emptyset \Leftrightarrow L_{npv}(A)=\sum_{pv}^{*} \Leftrightarrow L(G)=\sum_{pv}^{*}$.Ak odpovie nie, tak $L(A)\neq\emptyset$. Teda problém či pre TS $L(A)=\emptyset$ by bol rozhodnuteľný, čo je spor s vetou.Preto problém $L(G)=\sum^{*}$ je pre bezkontextové jazyky nerozhodnuteľný.