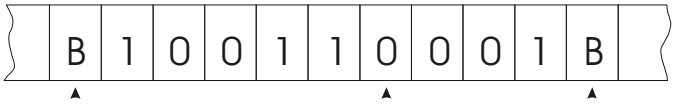
Úloha:

Zadefinujte viachlavový TS a dokážte, že je ekvivalentný s jednohlavovým. Teda že pre každý k-hlavový TS **M**, existuje jednohlavový TS **M'** taký, že **L(M) = L(M')**.

Riešenie:

Najskôr zadefinujem viachlavový Turingov stroj (ďalej len VTS) štandardnými 4 definíciami.



Definícia 1

Nedeterministický VTS je 7-tica

$$M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F, k)$$

kde **K, Σ, Γ, q_0, F** sú ako v nedeterministickom turingovom stroji (ďalej len NTS),
k je počet hláv a

$$\delta : K \times \Gamma^k \rightarrow 2^{K \times (\Gamma - \{B\})^k \times \{-1,0,1\}^k}$$

Definícia 2

Konfigurácia VTS je k+1 -tica

$$K \times (\Gamma - \{B\})^* \times N^k$$

pre $(q, w, i_1...i_k)$ platí $0 \le i_m \le |w|+1$, pričom $1 \le k \le m$

Definícia 3

Krok výpočtu VTS je relácia $\vdash$ na konfiguráciach definovaná takto:
$(q, a_1...a_n, i_1...i_k) \vdash (p, b_1...b_n, j_1...j_k)$ práve vtedy, keď

$$(p, b_{i_1}...b_{i_k}, j_1 - i_1 ... j_k - i_k) \in \delta(q, a_{i_1}...a_{i_k})$$

pričom $a_m = b_m$, $\forall m \neq i_r$, $1 \le r \le k$

Definícia 4

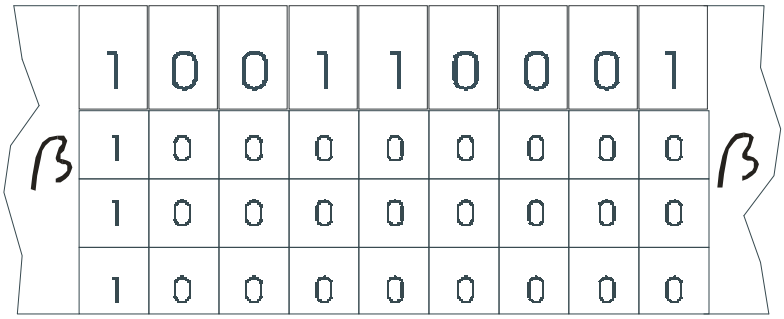
Jazyk akceptovaný VTS **M** je **L(M)**

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, 1...1) \vdash^* (q, w', i_1...i_k),\ q \in F\}$$

VTS pracuje na jednej páske s k hlavami, pričom platí pravidlo: ak chcú viaceré hlavy zapísať na to isté miesto, zapíše iba hlava s najväčším indexom.

Konštrukcia:

VTS budeme simulovať na NTS, ktorý má k+1 stopú pásku. Konštrukciu NTS rozdelíme do viacerých krokov. V prvom kroku vyrobíme z jednostopej pásky k+1 stopú pásku tak, že prvú stopu (vstupne slovo) ponecháme a na všetky ostatné stopy dáme všade znak "0" a na prvú pozíciu dáme znak "1". Znak "1" znázorňuje pozíciu hlavy, t.j. na začiatku sú všetky hlavy na prvom znaku.



V druhom kroku budeme simulovať jednotlivé kroky výpočtu VTS. Jeden krok výpočtu VTS pozostáva z dvoch cyklov. V prvom cykle načítame znaky pod každou hlavou. A v druhom cykle zapíšeme znak pod i-tou hlavou a presunieme hlavu podľa δ-funkcie VTS.
V prvom cykle prechádzame stavmi $q_{sija1...ak}$, kde s je stav vo VTS, i je hlava s ktorou práve pracujeme j nadobúda hodnoty 0..1. Pričom "0" znamená presun na začiatok pásky, "1" hľadá od začiatku pásky i-tu hlavu a keď ju nájde tak sa načíta znak pod hlavou a presúva sa do stavu $q_{si+1\ 0\ a1...ai}$,t.j. pridá načítaný a_i-ty znak.
V druhom cykle prechádzame stavmi $q_{sija1...ak}$, kde j je z intervalu 2...5. Pričom "2"-"3" sú ekvivalentné s "0"-"1". Pri j rovné "4" zapíšeme na prvú stopu znak podľa δ-funkcie VTS ,na i-tej stope zapíšeme 0 a presunieme hlavu podľa δ-funkcie VTS doľava, doprava alebo stojíme. V j+1 iba zapíšeme na i-tu stopu znak "1" a presunieme sa do stavu $q_{si+1\ 3\ a1...ai}$.
Po prechode všetkými i-čkami (t.j. 1...k) sa presunieme do stavu q_{p10}, kde p je nový stav podľa VTS. Ak q_p vo VTS akceptuje, tak náš stav v NTS q_{p10} tiež akceptuje.

δ-funkcia VTS

$$\delta(q_s, a_1...a_k) \in \{(q_p, b_1...b_k, c_1...c_k)\}$$

$x_1...x_k, b_1...b_k \in \Gamma$
$c_1...c_k \in \{-1, 0, 1\}$

δ-funkcia NTS

$$\delta\begin{pmatrix} q_{s10}, \begin{matrix} x_1 \\ \cdots \\ x_{k+1} \end{matrix} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} q_{s10}, \begin{matrix} x_1 \\ \cdots \\ x_{k+1} \end{matrix}, -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \delta(q_{s10}, \beta) \in \{(q_{s11}, \beta, 1)\}$$

$$\delta\begin{pmatrix} q_{s11}, \begin{matrix} x_1 \\ 0 \\ \cdots \\ x_{k+1} \end{matrix} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} q_{s11}, \begin{matrix} x_1 \\ 0 \\ \cdots \\ x_{k+1} \end{matrix}, 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\delta\begin{pmatrix} q_{s11}, \begin{matrix} a_1 \\ 1 \\ \cdots \\ x_{k+1} \end{matrix} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} q_{s20a_1}, \begin{matrix} a_1 \\ 1 \\ \cdots \\ x_{k+1} \end{matrix}, 0 \end{pmatrix} \right\} \quad ... \quad \delta\begin{pmatrix} q_{sk1a_1...a_{k-1}}, \begin{matrix} a_k \\ \cdots \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} q_{s13a_1...a_k}, \begin{matrix} a_k \\ \cdots \\ 1 \end{matrix}, 0 \end{pmatrix} \right\}$$

...

$$\delta\begin{pmatrix} q_{sh4a_1...a_k}, \begin{matrix} a_h \\ \cdots \\ 1_{h+1} \\ \cdots \\ x_{k+1} \end{matrix} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} q_{sh5a_1...a_k}, \begin{matrix} b_h \\ \cdots \\ 0_{h+1} \\ \cdots \\ x_{k+1} \end{matrix}, c_h \end{pmatrix} \right\} \forall h \in \{1..k\} \qquad \delta\begin{pmatrix} q_{sh5a_1...a_k}, \begin{matrix} x_1 \\ \cdots \\ 0_{h+1} \\ \cdots \\ x_{k+1} \end{matrix} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} q_{sh+12a_1...a_k}, \begin{matrix} x_1 \\ \cdots \\ 1_{h+1} \\ \cdots \\ x_{k+1} \end{matrix}, 0 \end{pmatrix} \right\} \forall h \in \{1..k-1\}$$

$$\delta\begin{pmatrix} q_{sk5a_1...a_k}, \begin{matrix} x_1 \\ \cdots \\ 0_k \end{matrix} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} q_{p10}, \begin{matrix} x_1 \\ \cdots \\ 1_k \end{matrix}, 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Dôkaz:

Dokážeme dve inklúzie.

L(M) $\subseteq$ L(M')

K všeobecnému VTS M = (K, Σ, Γ, δ, q_0, F, k) vieme zostrojiť NTS M' = (K', Σ', Γ', δ', q_0', F') nasledovne:

Σ' = Σ

ak F = {q_1...q_w}, potom F' = {q_{110}...q_{w10}}

K' = {q_0', q_z, $q_{sija1...ak}$}, s je stav vo VTS, i je hlava s ktorou práve pracujeme j nadobúda hodnoty 0..5

V stave q_0' prechádzame páskou na koniec a vytvárame k-stopú pásku. Na začiatok sa vrátime stavom q_z. Ďalej už pracuje podľa popísanej konštrukcie.

Γ $\subseteq$ Γ'

Γ' obsahuje navyše viacstopé znaky.

L(M) $\supseteq$ L(M')

Dôkaz je triviálny keď si uvedomíme, že NTS s jednou hlavou je vlastne VTS, pre k=1. To znamená, že platí L(M) $\supseteq$ L(M')