Marek Ágh, foja1, sada č.3, úloha č.2

Zadanie: Pomocou LBA (lineárne ohraničených automatov) dokážte uzavretost' triedy kontextových jazykov na inverzný homomorfizmus.
Teda pre daný LBA A a homomorfizmus h zostrojte LBA A' také, že $L(A') = h^{-1}(L(A)) = \{w \mid h(w) \in L(A)\}$

Veta 1 *K l'ubovolnej kontextovej gramatike G existuje LBA A taký, že* $L(A) = L(G)$.

Veta 2 *K l'ubovolnému LBA A existuje kontextová gramatika G taká, že* $L(G) = L(A) - \{\epsilon\}$.

Definícia 1 *Homomorfizmus : h:* $\Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$

$h(uv) = h(u)h(v) \quad (\forall u, v \in \Sigma_1^*)$

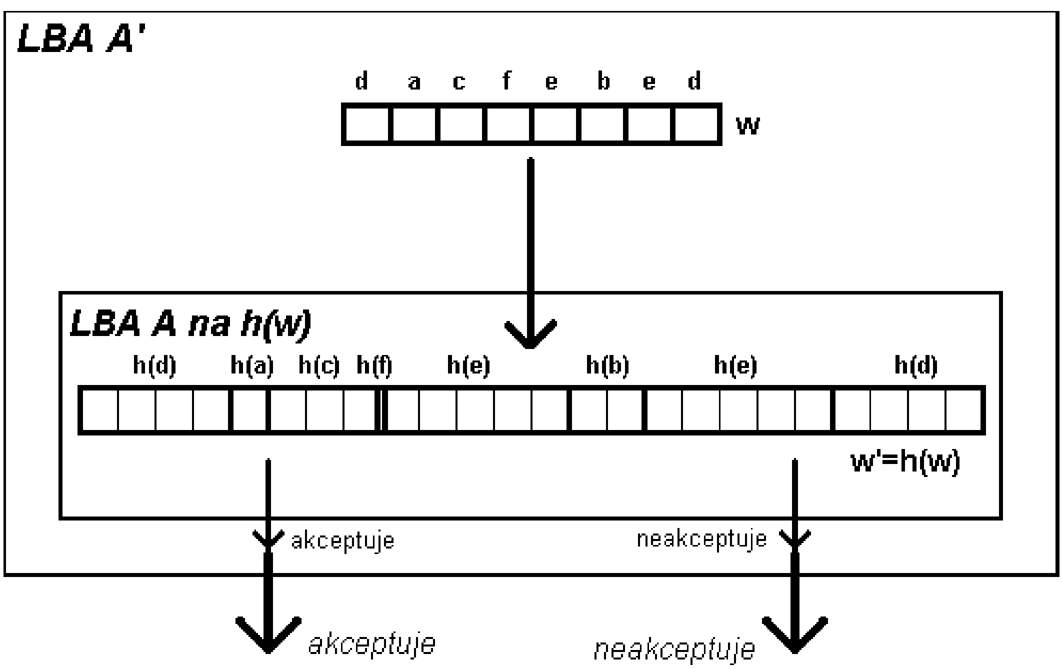
resp. pre jazyky h(L) $= \{h(u) \mid u \in L\}$

Definícia 2 *Inverzný homomorfizmus :*

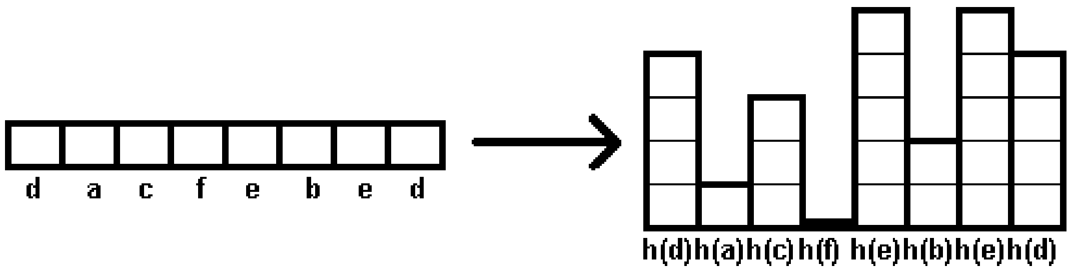
$h^{-1} : \Sigma_2^* \to 2^{\Sigma_1^*} \quad h^{-1}(v) = \{w \mid h(w) = v\}$

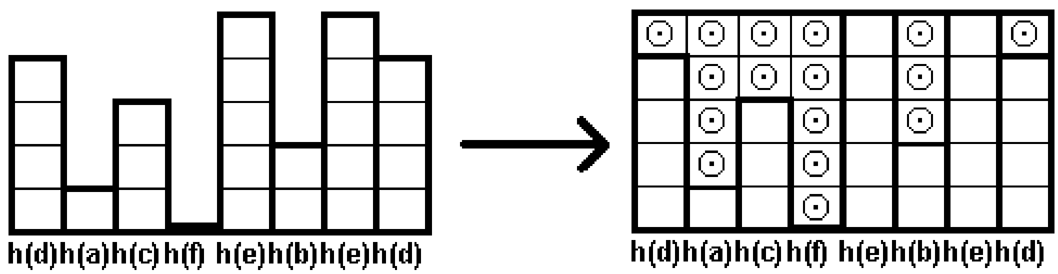
resp. pre jazyky

$h^{-1}(L) = \{w \in \Sigma_1^* \mid h(w) \in L\}$



$(\exists w \in L(A)) : \quad /h(w)/ > /w/$





- definovanie pracovných symbolov v Γ'

Prepis pásky na pásku homomorfných obrazov:

(1) $\delta'(q'_0, a) = (q'_0, \begin{pmatrix} h_d(a) \\ . \\ h_1(a) \end{pmatrix}, 1) \quad \forall a \in \Sigma;$

$h_i(a) = \left\{ \frac{i\text{-}ty\ \ znak\ \ v\ \ h(a),\ \ ak\ \ /h(a)/\geq i}{symbol\ \odot,\ \ ak\ \ /h(a)/<i} \right.$

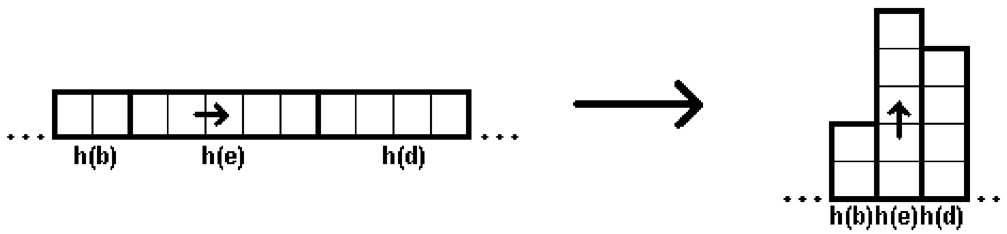
Návrat spät':

(2) $\delta'(q'_0, \$) = (q_B, \$, -1)$

(3) $\delta'(q'_B, a) = (q_B, a, -1) \quad \forall a \in \Gamma'$

(4) $\delta'(q'_B, ¢\,) = ({}^1q_0^1, ¢\,, 1)$

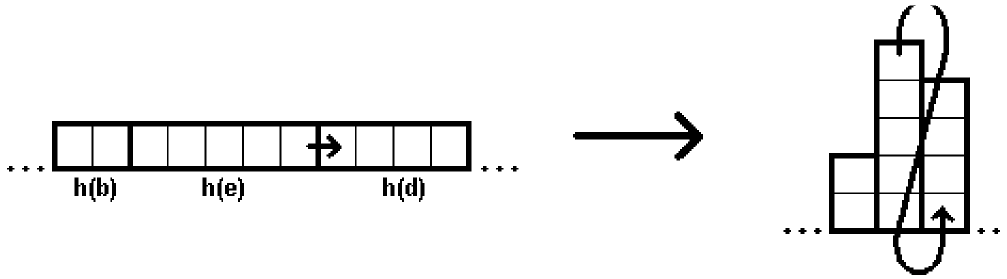
- definovanie stavov K'



Práca vo vnútri pásky vzhl'adom na starý automat:
-vo vnútri stĺpca písmen:

$$(5)\ ({}^{p}q_2^{i+p}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ b \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}, 0) \ni \delta'({}^{0}q_1^{i}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_d = a \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}) \Leftrightarrow$$

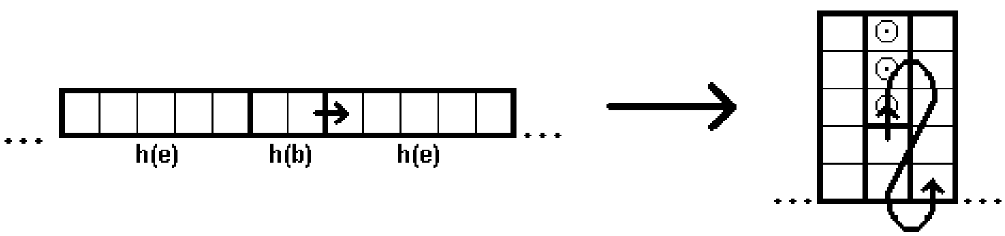
$$(q_2, b, p) \ni \delta(q_1, a); 1 \leq i + p \leq d$$

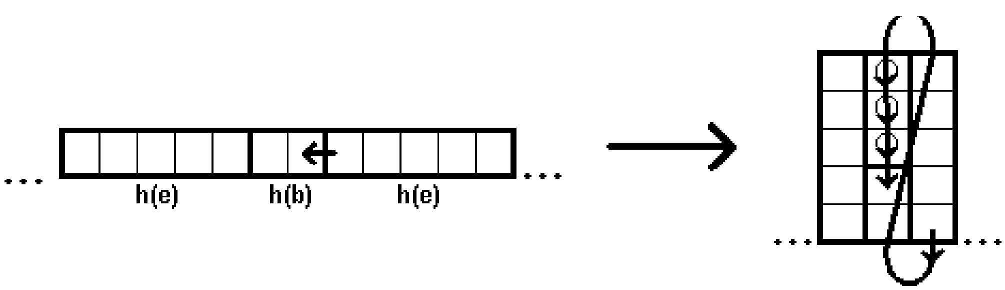


-na hornom konci stĺpca, ak ideme dopredu:

(6) $({}^{1}q_{2}^{1}, \begin{pmatrix} b \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}, 1) \ni \delta'({}^{0}q_{1}^{d}, \begin{pmatrix} a_d = a \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}) \Leftrightarrow$

$(q_2, b, 1) \ni \delta(q_1, a)$





-na dolnom konci stĺpca, ak ideme dozadu:

(7) $({}^{-1}q_{2}^{d}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ b \end{pmatrix}, -1) \ni \delta'({}^{0}q_{1}^{1}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_1 = a \end{pmatrix}) \Leftrightarrow$

$(q_2, b, -1) \ni \delta(q_1, a)$

Prechod z "hl'adacích" stavov do normálnych:
-ked' stav ukazuje na neprázdny znak:

$$(8)\ \delta'({}^{t}q^{i}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_i \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}) = ({}^{0}q^{i}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_i \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}, 0); a_i \neq \odot,$$

$t \in \{-1, 1\}, 1 \leq i \leq d$

-pre prázdny znak:

-ak ideme dopredu, na d'alší stĺpec:

$$(9)\ \delta'({}^{1}q^{i}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_i = \odot \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}) = ({}^{1}q^{1}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_i = \odot \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}, 1);$$

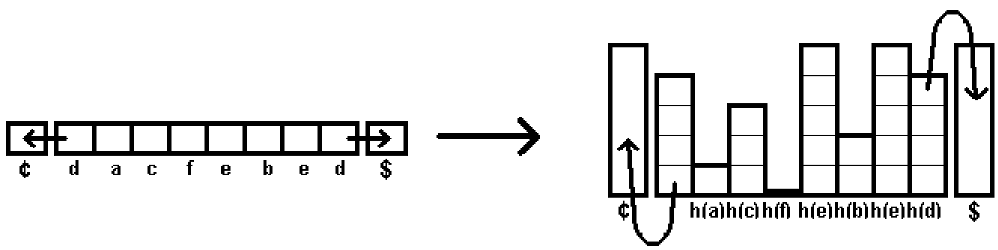
$a_i = \odot, 1 \leq i \leq d$

-ak ideme dozadu, hl'adat' o 1 dozadu:

$$(10)\ \delta'({}^{-1}q^{i}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_i = \odot \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}) = ({}^{-1}q^{i-1}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_i = \odot \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}, 0);$$

$a_i = \odot, 1 < i \leq d$

$$(11)\ \delta'({}^{-1}q^{1}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_1 = \odot \end{pmatrix}) = ({}^{-1}q^{d}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_1 = \odot \end{pmatrix}, -1)$$



Ked' pri hl'adaní narazíme na "$" alebo "¢":

(12) $\delta'({}^{1}q^{1}, \$) = ({}^{0}q^{\text{¢}\,\$}, \$, 0)$

(13) $\delta'({}^{-1}q^{d}, \text{¢}) = ({}^{0}q^{\text{¢}\,\$}, \text{¢}, 0)$

Zmeny stavu na koncoch pásky bez pohybu:

(14) $({}^{0}q_{2}^{\text{¢}\,\$}, s, 0) \ni \delta'({}^{0}q_{1}^{\text{¢}\,\$}, s) \Leftrightarrow (q_2, s, 0) \ni \delta(q_1, s); s \in \{\text{¢}, \$\}$

Prechod od krajov spät' do stĺpcov:

-výstup z konca pásky:

(15) $({}^{-1}q_{2}^{d}, \$, -1) \ni \delta'({}^{0}q_{1}^{\text{¢}\,\$}, \$) \Leftrightarrow (q_2, \$, -1) \ni \delta(q_1, \$)$

-výstup zo začiatku pásky:

(16) $({}^{1}q_{2}^{1}, \text{¢}, 1) \ni \delta'({}^{0}q_{1}^{\text{¢}\,\$}, \text{¢}) \Leftrightarrow (q_2, \text{¢}, 1) \ni \delta(q_1, \text{¢})$

Riešenie: Nech $h : \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ je homomorfizmus a LBA $A = \{K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F\}$.
Potom rieśenm je LBA $A' = \{K', \Sigma', \Gamma', \delta', q'_0, F'\}$, kde

$K' = \{{}^k q_i^j \mid q_i \in K, j \in \{1, 2, \dots d\} \bigcup \{\text{¢ \$}\}, d = \{/h(a)/ \mid a \in \Sigma, h : \Sigma \rightarrow \Sigma^* \text{je homomorfizmus}\}, k \in \{-1, 0, 1\}\}$

$\Sigma' = \Sigma$

$$\Gamma' = \{ \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ . \\ . \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \mid a_i \in \Sigma' \bigcup \{\odot\}, i \in \{1, 2, \dots d\}, d = \{/h(a)/ | a \in \Sigma, h : \Sigma \rightarrow \Sigma^* \text{je homomorfizmus}\}\ \}$$

$F' = \{{}^0 q_f^i \mid i \in \{1, 2, \dots d\} \bigcup \{\text{¢ \$}\}, q_f \in F, d = \{/h(a)/ \mid a \in \Sigma, h : \Sigma \rightarrow \Sigma^* \text{je homomorfizmus}\}\ \}$

Dôkaz:

$L(A') \subseteq h^{-1}(L(A))$

$((\forall w \in L(A'))(\exists w') : w \in h^{-1}(w')) : w' \in L(A)$
$w \in h^{-1}(w') \Rightarrow w' = h(w)$
$(\forall w \in L(A'))(\exists w' : w' = h(w)) : w' \in L(A)$

-teda chceme ukázat', že ak bolo nejaké slovo odakceptované novým LBA A', potom jeho homomorfný obraz odakceptuje pôvodný automat A.

Správnost' :

1. $Q_k = \{{}^j q_k^i \mid i \in \{1, 2, \dots d\} \bigcup \{¢\,\$\}, d = \{/h(a)/ \mid a \in \Sigma, h : \Sigma \to \Sigma^*$ je homomorfizmus $\}, j \in \{-1, 0, 1\}, q_k \in K\ \}$

   $\forall P \in \{(5),(6),(7),(14)(15),(16)\} \subset \delta' : (\delta'(q_i', a_1') = (q_j', a_2', d) \Leftrightarrow \delta(q_i, a_1) = (q_j, a_2, d')) \Longrightarrow (q_i' \in Q_i \bigwedge q_j' \in Q_j); i, j \in \{1, \dots n\}, n = /K/, a_1, a_2 \in \Gamma, a_1', a_2' \in \Gamma', d, d' \in \{-1, 0, 1\}$

2. $(q_r, ¢\, a_1 \dots a_i lara_{i+1} \dots a_k \$, i+2) \vdash^*$
$(q_s, ¢\, a_1 \dots a_i lbra_{i+1} \dots a_k \$, i+2+d)$ je krok výpočtu LBA A

$$\Longleftrightarrow$$

$(q'_r, ¢\, a'_1 \dots a'_j F_1 a'_{j+z_1} \dots a'_l \$, j+z_2) \vdash^*$
$(q'_s, ¢\, a'_1 \dots a'_j F_2 a'_{j+z_1} \dots a'_l \$, j+z_2+p)$ je krok výpočtu LBA A';
$F_1, F_2 \in \Gamma' \bigcup \Gamma'\Gamma', z_1, z_2 \in \{1,2\}, a_1, \dots a_k,$
$l, a, r, b \in \Gamma, a'_1, \dots a'_l \in \Gamma', i < k, j < l, d, p \in \{-1, 0, 1\}$

$$\wedge$$

(

$$F_1 = \begin{pmatrix} . \\ r \\ a \\ l \\ . \end{pmatrix} \Longrightarrow (F_2 = \begin{pmatrix} . \\ r \\ b \\ l \\ . \end{pmatrix} \wedge$$

$z_1 = 1 \wedge z_2 = 1)$

$$\bigvee$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} l \\ . \\ . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . \\ r \\ a \end{pmatrix} \Longrightarrow (F_2 = \begin{pmatrix} l \\ . \\ . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . \\ r \\ b \end{pmatrix} \wedge$$
$$z_1 = 2 \wedge z_2 = 2)$$

$$\bigvee$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} a \\ l \\ . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . \\ . \\ r \end{pmatrix} \Longrightarrow (F_2 = \begin{pmatrix} b \\ l \\ . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . \\ . \\ r \end{pmatrix} \wedge$$
$$z_1 = 2 \wedge z_2 = 1)$$
$$)$$

$$\bigwedge$$

$$(\ (z_1 = 2 \wedge (((d = -1 \wedge z_2 = 2) \Rightarrow p = -1)) \vee ((d = 1 \wedge z_2 = 1) \Rightarrow p = 1))$$

$$\bigvee$$

$$(p = 0))$$

$$\bigwedge$$

$$(q'_r \in Q_r \wedge q'_s \in Q_s)$$

3. *Vstup na ¢ :*
$(q_i, ¢\, aa_1 \dots a_n \$, 1) \vdash$
$(q_j, ¢\, ba_1 \dots a_n \$, 0)$ je krok výpočtu LBA A

$$\Leftrightarrow$$

$({}^0q_i^1, ¢ \begin{pmatrix} p_{d-1} \\ \cdot \\ p_1 \\ a \end{pmatrix} a'_1 \dots a'_m \$, 1) \vdash$
$({}^{-1}q_j^d, ¢ \begin{pmatrix} p_{d-1} \\ \cdot \\ p_1 \\ b \end{pmatrix} a'_1 \dots a'_m \$, 0) \vdash$
$({}^0q_j^{¢\,\$}, ¢\, a'_1 \dots a'_{m+1} \$, 0)$ sú príslušné 2 kroky výpočtu LBA A'

Vstup na \$:

(a) Z vrchu poschodového znaku:
$(q_i, ¢\, a_1 \ldots a_n a\$, n+1) \vdash$
$(q_j, ¢\, a_1 \ldots a_n b\$, n+2)$ je krok výpočtu LBA A

$$\Leftrightarrow$$

$$({}^0q_i^d, ¢\, a'_1 \ldots a'_m \begin{pmatrix} a \\ p_{d-1} \\ . \\ p_1 \end{pmatrix} \$, m+1) \vdash$$

$$({}^{+1}q_j^1, ¢\, a'_1 \ldots a'_m \begin{pmatrix} b \\ p_{d-1} \\ . \\ p_1 \end{pmatrix} \$, m+2) \vdash$$

$({}^0q_j^{¢\,\$}, ¢\, a'_1 \ldots a'_{m+1}\$, m+2)$ sú príslušné 3 kroky výpočtu LBA A'

(b) Z vnútra poschodového znaku, za ktorým sú $\odot$:
$(q_i, ¢\, a_1 \ldots a_n a\$, n+1) \vdash$
$(q_j, ¢\, a_1 \ldots a_n b\$, n+2)$ je krok výpočtu LBA A

$$\Leftrightarrow$$

$$({}^{0}q_i^r, \cent\, a'_1 \ldots a'_m \begin{pmatrix} . \\ \odot \\ a \\ p_k \\ . \\ p_1 \end{pmatrix} \$, m+1) \vdash$$

$$({}^{+1}q_j^{r+1}, \cent\, a'_1 \ldots a'_m \begin{pmatrix} . \\ \odot \\ b \\ p_k \\ . \\ p_1 \end{pmatrix} \$, m+1) \vdash$$

$({}^{+1}q_j^1, \cent\, a'_1 \ldots a'_{m+1}\$, m+2) \vdash$
$({}^{0}q_j^{\cent\,\$}, \cent\, a'_1 \ldots a'_{m+1}\$, m+2)$ sú príslušné
4 kroky výpočtu LBA A'

4. $(\delta'(q'_i, a'_1) = (q'_f, a'_2, d) \Leftrightarrow \delta(q_i, a_1) = (q_f, a_2, d'))$
$\Longrightarrow (q'_i \in Q_i \wedge q'_f \in Q_f); i, f \in \{1, \ldots n\}, n =$
$/K/, a_1, a_2 \in \Gamma, a'_1, a'_2 \in \Gamma', d, d' \in \{-1, 0, 1\}, q_f \in$
F

$h^{-1}(L(A)) \subseteq L(A')$

$(\forall w \in L(A))(\forall w_1, \ldots w_n : h^{-1}(w) = \{w_1, \ldots w_n\}) :$
$\{w_1, \ldots w_n\} \in L(A')$
$(h^{-1}(w) = \{w_1, \ldots w_n\}) \Rightarrow (\forall i \in \{1, \ldots n\} h(w_i) = w)$
$(\forall w \in L(A))(\forall w_1, \ldots w_n : (\forall i \in \{1, \ldots n\} h(w_i) = w) : \{w_1, \ldots w_n\} \in L(A')$

-zaujíma nás teda, čo spraví LBA A' so slovami $w_1, \ldots w_n$, o ktorých vieme, že sa zobrazia homomorfizmom h na automatom A akceptované slovo w.
Hneď prvý stav nového LBA A' a k nemu prislúchajúca časťδ-funkcie však dokazuje, že A' v 1. kroku prepíše vstup na homomorfný obraz a ďalej postupuje podľa prispôsobených pravidiel automatu A (zhodnosť výpočtov oboch automatov na rôznych štruktúrach pásky ukazujú 4 body 1. časti dôkazu).

$h^{-1}(L(A)) \subseteq L(A')$

Z platnosti oboch inklúzií vyplýva platnosť tvrdenia:
$(L(A') \subseteq h^{-1}(L(A)) \wedge L(A') \supseteq h^{-1}(L(A))) \Longrightarrow L(A') = h^{-1}(L(A))$

Využitím vety 1 a vety 2 a konštrukciou s dôkazom poskytnutou v tomto dokumente sme pomocou lineárne ohraničených automatov dokázali uzavretosť triedy kontextových jazykov na inverzný homomorfizmus.