Prezentácia, Marek Ágh, foja1, sada č.3, úloha č.2

Zadanie:

Pomocou LBA (lineárne ohraničených automatov) dokážte uzavretosť triedy kontextových jazykov na inverzný homomorfizmus. Teda pre daný LBA A a homomorfizmus h zostrojte LBA A' také, že $L(A') = h^{-1}(L(A)) = \{w \mid h(w) \in L(A)\}$

Riesenie:

Nech $h : \Sigma \to \Sigma^*$ je homomorfizmus a LBA $A = \{K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F\}$. [1]
Potom riešením je LBA $A' = \{K', \Sigma', \Gamma', \delta', q_0', F'\}$, kde

$K' = \{{}^k q_i^j \mid q_i \in K, j \in \{1, 2, \ldots d\} \bigcup \{¢\ \$\}, d = \{/h(a)/ \mid a \in \Sigma, h : \Sigma \to \Sigma^*\text{je homomorfizmus}\}, k \in \{-1, 0, 1\}\}$
$\Sigma' = \Sigma$

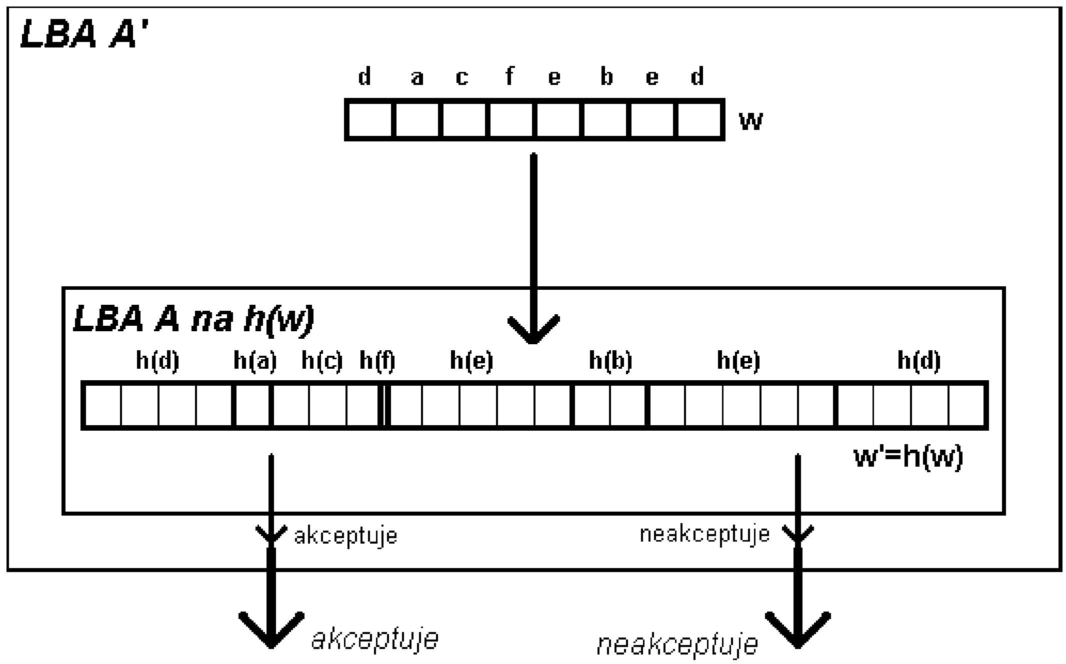
$$\Gamma' = \{ \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ . \\ . \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \mid a_i \in \Sigma' \bigcup \{\odot\}, i \in \{1, 2, \ldots d\}, d = \{/h(a)/ | a \in \Sigma, h : \Sigma \to \Sigma^*\text{je homomorfizmus}\} \}$$

$F' = \{{}^0 q_f^i \mid i \in \{1, 2, \ldots d\} \bigcup \{¢\ \$\}, q_f \in F, d = \{/h(a)/ \mid a \in \Sigma, h : \Sigma \to \Sigma^*\text{je homomorfizmus}\} \}$

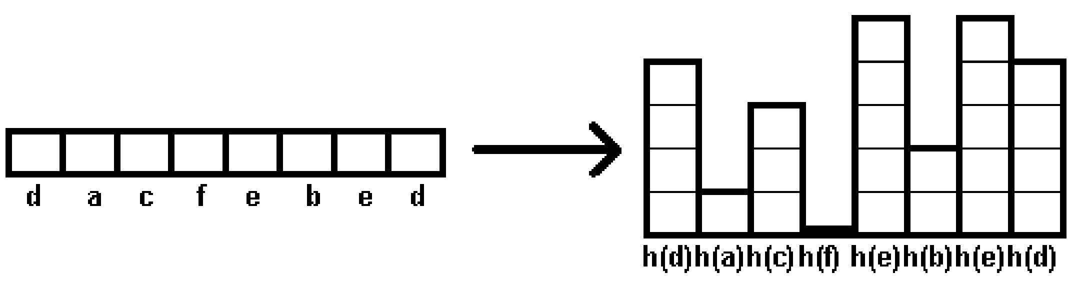
Princíp:

Na to, aby sme mohli akceptovať vzory homomorfizmu (teda obrazy inverzného homomorfizmu), keď máme k dispozícii automat akceptujúci ich obrazy, musíme pre dané slovo w a homomorfizmus h rozvinúť na páske homomorfný obraz slova w = w' a simulovaním pôvodného automatu A rozhodnúť, či pôvodné slovo akceptujeme.

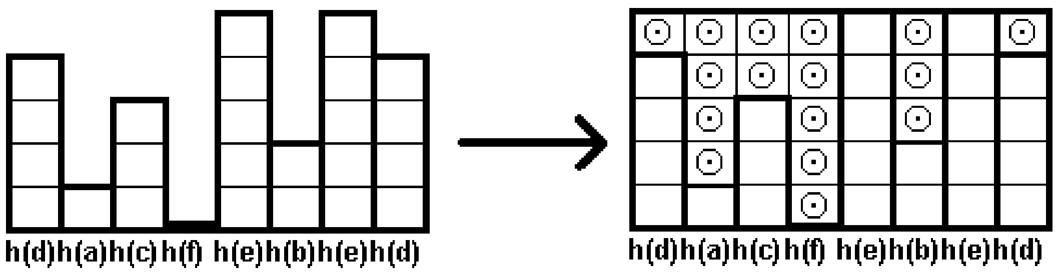
[1] Bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať , že v pracovných symboloch LBA A sa nevyskytuje znak $\odot$ (ak hej, tak ho substituujeme iným), že všetky stavy automatu A sú stavy $q_1, \ldots q_n$, kde n=/K/ (ak nie, tak ich na také popremenúvame) a že jediným akceptačným stavom je stav q_f, kde $f \in \{1, \ldots n\}$ (ak nie, všetky ostatné akc. stavy dodatočným kúskom δ-funkcie sem odvedieme).



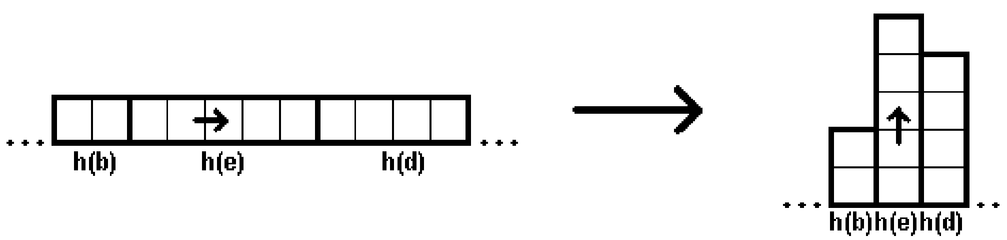
Narážame však na problém vyplývajúci z def. homomorfizmu, kde môže nastať prípad, že $/h(w)/ > /w/$ a z ohraničenosti pásky, ktorú nemôžeme rozšíriť do strán a teda nemôžeme na páske regulárne prepísať slovo w na w'=h(w). Môžme ale nahradiť každý symbol "a" niekoľkoposchodovým znakom, ktorý bude reprezentovať "h(a)", teda akoby sme h(w) postavili:



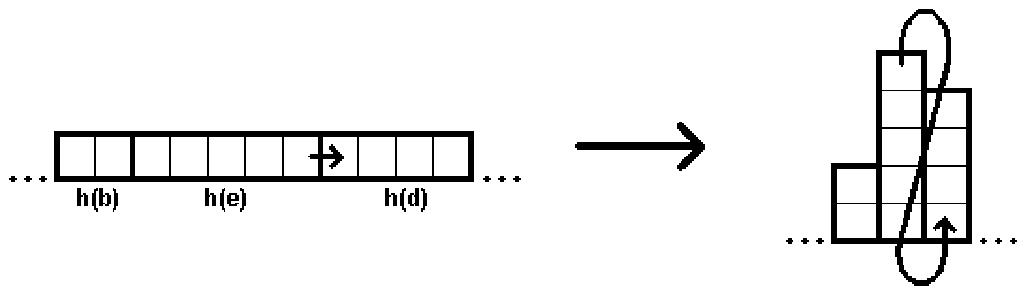
Je pre nás však obtiažne pamätať si počet poschodí homomorfizmu každého znaku, preto všetky poschodia vyrovnáme na úroveň najdlhšieho homomorfného zápisu ľub. písmena a znaky, ktoré neobsahujú žiadne písmeno zadefinujeme ako " $\odot$ ":



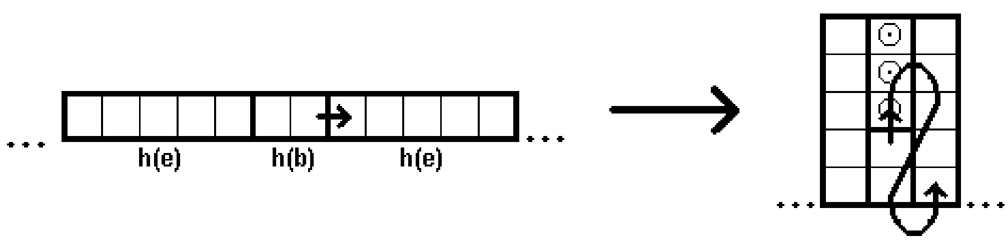
Treba však upraviť δ-funkciu, aby chodila uprostred homomorfizmov písmen zvislo

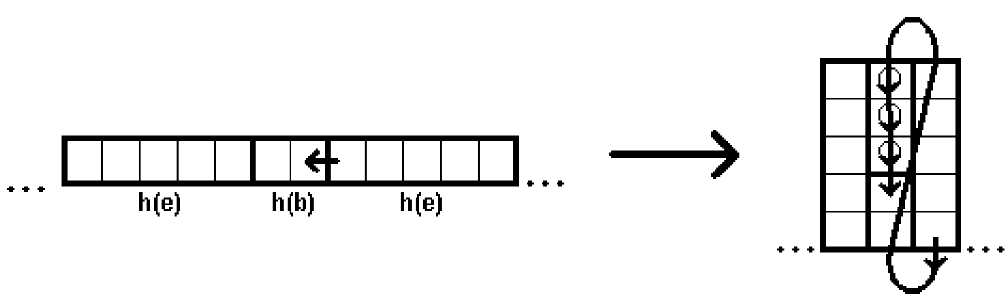


medzi homomorfizmami písmen, aby preskočila z vrcholu jedného stĺpca na spodok nasledujúceho a naopak,

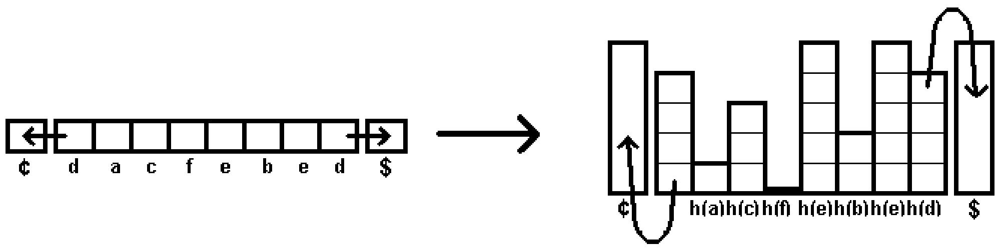


aby ignorovala prázdne znaky na stĺpcovej páske (tu zavedieme pri každom posune najskôr skok do príslušného "hľadacieho" stavu, ktorý preskáče cez $\odot$ a až potom prejde do pravého stavu)





a aby vedela vchádzať na okraje pásky, ktoré nemôžme zameniť za poschodové znaky (¢ ,\$).



δ-funkcia:

Prepis pásky na pásku homomorfných obrazov:

$$(1)\ \delta'(q_0', a) = (q_0', \begin{pmatrix} h_d(a) \\ . \\ h_1(a) \end{pmatrix}, 1) \forall a \in \Sigma; h_i(a) = \left\{ \frac{i\!-\!ty\ znak\ v\ h(a),\ ak\ /h(a)/\!\geq\! i}{symbol\ \odot,\ ak\ /h(a)/\!<\!i} \right.$$

Návrat späť:

$(2)\ \delta'(q_0', \$) = (q_B, \$, -1)$
$(3)\ \delta'(q_B', a) = (q_B, a, -1) \forall a \in \Gamma'$
$(4)\ \delta'(q_B', ¢\ ) = ({}^1q_0^1, ¢\ , 1)$

Práca vo vnútri pásky vzhľadom na starý automat:
-vo vnútri stĺpca písmen:

$$(5)\ ({}^p q_2^{i+p}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ b \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}, 0) \ni \delta'({}^0 q_1^i, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_d = a \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}) \Leftrightarrow (q_2, b, p) \ni \delta(q_1, a); 1 \leq i+p \leq d$$

-na hornom konci stĺpca, ak ideme dopredu:

$$(6)\ ({}^1 q_2^1, \begin{pmatrix} b \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}, 1) \ni \delta'({}^0 q_1^d, \begin{pmatrix} a_d = a \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}) \Leftrightarrow (q_2, b, 1) \ni \delta(q_1, a)$$

-na dolnom konci stĺpca, ak ideme dozadu:

$$(7)\ ({}^{-1} q_2^d, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ b \end{pmatrix}, -1) \ni \delta'({}^0 q_1^1, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_1 = a \end{pmatrix}) \Leftrightarrow (q_2, b, -1) \ni \delta(q_1, a)$$

Prechod z "hľadacích" stavov do normálnych:
-keď stav ukazuje na neprázdny znak:

(8) $\delta'({}^{t}q^{i}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_i \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}) = ({}^{0}q^{i}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_i \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}, 0); a_i \neq \odot, t \in \{-1, 1\}, 1 \leq i \leq d$

-pre prázdny znak:

-ak ideme dopredu, na ďalší stĺpec:

(9) $\delta'({}^{1}q^{i}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_i = \odot \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}) = ({}^{1}q^{1}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_i = \odot \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}, 1); a_i = \odot, 1 \leq i \leq d$

-ak ideme dozadu, hľadať o 1 dozadu:

(10) $\delta'({}^{-1}q^{i}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_i = \odot \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}) = ({}^{-1}q^{i-1}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_i = \odot \\ . \\ a_1 \end{pmatrix}, 0); a_i = \odot, 1 < i \leq d$

(11) $\delta'({}^{-1}q^{1}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_1 = \odot \end{pmatrix}) = ({}^{-1}q^{d}, \begin{pmatrix} a_d \\ . \\ a_1 = \odot \end{pmatrix}, -1); a_i = \odot$

Keď pri hľadaní narazíme na "\$" alebo "¢":

(12) $\delta'({}^{1}q^{1}, \$) = ({}^{0}q^{¢\,\$}, \$, 0)$

(13) $\delta'({}^{-1}q^{d}, ¢) = ({}^{0}q^{¢\,\$}, ¢, 0)$

Zmeny stavu na koncoch pásky bez pohybu:

(14) $({}^{0}q_2^{¢\,\$}, s, 0) \ni \delta'({}^{0}q_1^{¢\,\$}, s) \Leftrightarrow (q_2, s, 0) \ni \delta(q_1, s); s \in \{¢, \$\}$

Prechod od krajov späť do stĺpcov:

-výstup z konca pásky:

(15) $({}^{-1}q_2^{d}, \$, -1) \ni \delta'({}^{0}q_1^{¢\,\$}, \$) \Leftrightarrow (q_2, \$, -1) \ni \delta(q_1, \$)$

-výstup zo začiatku pásky:

(16) $({}^{1}q_2^{1}, ¢, 1) \ni \delta'({}^{0}q_1^{¢\,\$}, ¢) \Leftrightarrow (q_2, ¢, 1) \ni \delta(q_1, ¢)$

Dôkaz:

$L(A') \subseteq h^{-1}(L(A))$

-t.j., že ku každému slovu, ktoré akceptuje nový LBA A' musí existovať slovo w', ktoré odkaceptuje pôvodný LBA A, také, že jeden zo vzorov homomorfizmu, ktorý sa zobrazí na w', bude slovo w:

$((\forall w \in L(A'))(\exists w') : w \in h^{-1}(w')) : w' \in L(A)$

$w \in h^{-1}(w') \Rightarrow w' = h(w)$

$(\forall w \in L(A'))(\exists w' : w' = h(w)) : w' \in L(A)$

-teda chceme ukázať, že ak bolo nejaké slovo odakceptované novým LBA A', potom jeho homomorfný obraz odakceptuje pôvodný automat A.

Majme teda slovo w, ktoré A' akceptoval. Teraz z neho urobíme homomorfný obraz w' a chceme ukázať, že ho pôvodný automat akceptuje.

Keďže ale konštrukcia A' je založená na tom, aby presne napodobňoval činnosť automatu A na akosi "zhustenej" páske, vyplýva akceptácia obrazu pôvodným automatom práve z akceptácie slova w automatom A' :

1. Automat A' na zhustenej páske zmení stav z množiny stavov Q_1($Q_k = \{{}^jq_k^i \mid i \in \{1, 2, \dots d\} \bigcup \{¢\ \$\}, d = \{/h(a)/ \mid a \in \Sigma, h : \Sigma \to \Sigma^*$ je homomorfizmus $\}, j \in \{-1, 0, 1\}, q_k \in K\ \}$) do množiny stavov Q_2 práve vtedy, keď pôvodný automat zmení stav z q_1 na q_2 .

   Dôkaz: vyplýva z konštrukcie δ-funkcie LBA A':
   $\forall P \in \{(5), (6), (7), (14)(15), (16)\} \subset \delta' : (\delta'(q_i', a_1') = (q_j', a_2', d) \Leftrightarrow \delta(q_i, a_1) = (q_j, a_2, d')) \implies (q_i' \in Q_i \bigwedge q_j' \in Q_j); i, j \in \{1, \dots n\}, n = /K/, a_1, a_2 \in \Gamma, a_1', a_2' \in \Gamma', d, d' \in \{-1, 0, 1\}$

2. A' zapíše na zhustenú pásku kontextovo na to isté miesto symbol "a" v tej istej množine stavov Q, ktorá prilieha stavu q, v ktorom na pôvodnú pásku píše kontextovo na príslušné miesto symbol "a" automat A.

   Dôkaz: vyplýva z konštrukcie δ-funkcie LBA A':
   $(q_r, ¢\ a_1 \dots a_i lara_{i+1} \dots a_k \$, i+2) \vdash^* q_s, ¢\ a_1 \dots a_i lbra_{i+1} \dots a_k \$, i+2+d)$ je krok výpočtu LBA A

$$\Longleftrightarrow$$

   $(q_r', ¢\ a_1' \dots a_j' F_1 a_{j+z_1}' \dots a_l' \$, j+z_2) \vdash^* q_s', ¢\ a_1' \dots a_j' F_2 a_{j+z_1}' \dots a_l' \$, j+z_2+ p)$ je krok výpočtu LBA A' ; $F_1, F_2 \in \Gamma' \bigcup \Gamma'\Gamma', z_1, z_2 \in \{1, 2\}, a_1, \dots a_k, l, a, r, b \in \Gamma, a_1', \dots a_l' \in \Gamma', i < k, j < l, d, p \in \{-1, 0, 1\}$

$$\bigwedge$$

(

$$F_1 = \begin{pmatrix} . \\ r \\ a \\ l \\ . \end{pmatrix} \Longrightarrow (F_2 = \begin{pmatrix} . \\ r \\ b \\ l \\ . \end{pmatrix} \bigwedge {z_1}^2 = 1 \bigwedge z_2 = 1)$$

$$\bigvee$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} l \\ . \\ . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . \\ r \\ a \end{pmatrix} \Longrightarrow (F_2 = \begin{pmatrix} l \\ . \\ . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . \\ r \\ b \end{pmatrix} \bigwedge z_1 = 2 \bigwedge z_2 = 2)$$

$$\bigvee$$

[2]Tu je asi potrebné ozrejmiť , že z_1 určuje šírku F_1, F_2 a z_2 určuje, na ktoré z oboch zátvoriek akurát ukazujeme.

$$F_1 = \begin{pmatrix} a \\ l \\ . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . \\ . \\ r \end{pmatrix} \Longrightarrow (F_2 = \begin{pmatrix} b \\ l \\ . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . \\ . \\ r \end{pmatrix} \bigwedge z_1 = 2 \bigwedge z_2 = 1)$$

) [3]

$$\bigwedge$$

$$(\ (z_1 = 2 \bigwedge (((d = -1 \bigwedge z_2 = 2) \Rightarrow p = -1)) \bigvee ((d = 1 \bigwedge z_2 = 1) \Rightarrow p = 1))$$

$$\bigvee$$

$(p = 0)$ [4]

)

$$\bigwedge$$

$$(q'_r \in Q_r \bigwedge q'_s \in Q_s)$$

3. Nový automat vstupuje na okraje pásky práve vtedy, keď tak robí pôvodný automat:

   Dôkaz: vyplýva z konštrukcie δ-funkcie LBA A':
   Vstup na ¢ :
   $(q_i, \text{¢}\, aa_1 \ldots a_n\$, 1)$ [5]$\vdash (q_j, \text{¢}\, ba_1 \ldots a_n\$, 0)$ je krok výpočtu LBA A

   $$\Leftrightarrow$$

   $$({}^0q_i^1, \text{¢} \begin{pmatrix} p_{d-1} \\ . \\ p_1 \\ a \end{pmatrix} a'_1 \ldots a'_m\$, 1) \vdash ({}^{-1}q_j^d, \text{¢} \begin{pmatrix} p_{d-1} \\ . \\ p_1 \\ b \end{pmatrix} a'_1 \ldots a'_m\$, 0) \vdash ({}^0q_j^{\text{¢}\,\$}, \text{¢}\, a'_1 \ldots a'_{m+1}\$, 0)$$

   sú príslušné 2 kroky výpočtu LBA A'
   Vstup na \$:

   (a) Z vrchu poschodového znaku:
   $(q_i, \text{¢}\, a_1 \ldots a_n a\$, n+1) \vdash (q_j, \text{¢}\, a_1 \ldots a_n b\$, n+2)$ je krok výpočtu LBA A

   $$\Leftrightarrow$$

[3] V tejto časti dôkazu autor vypustil prípady, keď časť konfigurácie l-a-r nie je rozdelená nutne len vrchom a spodkom susedného poschodia, ale aj postupnosťou $\odot$ symbolov, pretože by sa dôkaz rozvetvil na značne viac ako 3 prípady a zkomplikoval pod hranicu minimálnej zrozumiteľnosti.

[4] Tu správne určujeme hodnotu p, ktorá zabezpečuje prípadný horizontálny posuv na poschodovej páske, ak symbol "a", na ktorom sme, je na spodku alebo na vrchu poschodového znaku

[5] Keďže číslo v kroku výpočtu je v literatúre ponímané rodielne, bude "1" znamenať , že hlava ukazuje na prvý symbol za ¢ a "0", že hlava LBA ukazuje na ¢ .

$({}^0q_i^d, ¢\, a'_1 \ldots a'_m \begin{pmatrix} a \\ p_{d-1} \\ . \\ p_1 \end{pmatrix} \$, m{+}1) \vdash ({}^{+1}q_j^1, ¢\, a'_1 \ldots a'_m \begin{pmatrix} b \\ p_{d-1} \\ . \\ p_1 \end{pmatrix} \$, m+$
$2) \vdash ({}^0q_j^{¢\ \$}, ¢\, a'_1 \ldots a'_{m+1}\$, m+2)$ sú príslušné 3 kroky výpočtu LBA A'

(b) Z vnútra poschodového znaku, za ktorým sú $\odot$:
$(q_i, ¢\, a_1 \ldots a_n a\$, n+1) \vdash (q_j, ¢\, a_1 \ldots a_n b\$, n+2)$ je krok výpočtu LBA A

$$\Leftrightarrow$$

$({}^0q_i^r, ¢\, a'_1 \ldots a'_m \begin{pmatrix} . \\ \odot \\ a \\ p_k \\ . \\ p_1 \end{pmatrix} \$, m{+}1) \vdash ({}^{+1}q_j^{r+1}, ¢\, a'_1 \ldots a'_m \begin{pmatrix} . \\ \odot \\ b \\ p_k \\ . \\ p_1 \end{pmatrix} \$, m+$
$1) \vdash ({}^{+1}q_j^1, ¢\, a'_1 \ldots a'_{m+1}\$, m+2) \vdash ({}^0q_j^{¢\ \$}, ¢\, a'_1 \ldots a'_{m+1}\$, m+2)$ sú príslušné 4 kroky výpočtu LBA A'

4. Do akceptačnej skupiny stavov sa dostáva tiež práve vtedy, keď sa do akceptačného stavu prislúchajúcemu tejto skupine dostáva automat pôvodný.

   Dôkaz: vyplýva z konštrukcie δ-funkcie LBA A':
   $(\delta'(q'_i, a'_1) = (q'_f, a'_2, d) \Leftrightarrow \delta(q_i, a_1) = (q_f, a_2, d')) \Longrightarrow (q'_i \in Q_i \bigwedge q'_f \in Q_f); i, f \in \{1, \ldots n\}, n = /K/, a_1, a_2 \in \Gamma, a'_1, a'_2 \in \Gamma', d, d' \in \{-1, 0, 1\}, q_f \in F$

Z uvedeného teda vyplýva, že odhliadnúc od rozdielnej štruktúry pásky pracuje nový automat A' na slove w rovnako, ako starý LBA A na jeho homomorfnom obraze. Platí $L(A') \subseteq h^{-1}(L(A))$.

$h^{-1}(L(A)) \subseteq L(A')$

-t.j., že pre všetky slová, ktoré akceptuje pôvodný automat A, ak sa na ne pozeráme ako na obrazy homomorfizmu, musí platiť, že ich všetky vzory musia byť akceptované automatom A':
$(\forall w \in L(A))(\forall w_1, \ldots w_n : h^{-1}(w) = \{w_1, \ldots w_n\}) : \{w_1, \ldots w_n\} \in L(A')$

$(h^{-1}(w) = \{w_1, \ldots w_n\}) \Rightarrow (\forall i \in \{1, \ldots n\} h(w_i) = w)$

$(\forall w \in L(A))(\forall w_1, \ldots w_n : (\forall i \in \{1, \ldots n\} h(w_i) = w) : \{w_1, \ldots w_n\} \in L(A')$
-zaujíma nás teda, čo spraví LBA A' so slovami $w_1, \ldots w_n$, o ktorých vieme, že sa zobrazia homomorfizmom h na automatom A akceptované slovo w.
Hneď prvý stav nového LBA A' a k nemu prislúchajúca časť δ-funkcie však dokazuje, že A' v 1. kroku prepíše vstup na homomorfný obraz a ďalej postupuje podľa prispôsobených pravidiel automatu A (zhodnosť výpočtov oboch automatov na rôznych štruktúrach pásky ukazujú 4 body 1. časti dôkazu).
Teda z predpokladu, že pôvodný automat akceptuje slovo w vyplýva, že nové

LBA A' musí akceptovať všetky jeho homomorfné vzory. Tvrdenie $h^{-1}(L(A)) \subseteq L(A')$ teda platí.

Z platnosti oboch inklúzií vyplýva platnosť tvrdenia:
$(L(A') \subseteq h^{-1}(L(A)) \bigwedge L(A') \supseteq h^{-1}(L(A))) \Longrightarrow L(A') = h^{-1}(L(A))$

Záver:

Veta 1: K ľubovolnej kontextovej gramatike G existuje LBA A taký, že $L(A) = L(G)$.
Dôkaz: Dôkaz tvrdenia poskytuje doc. RNDr. Branislav Rovan, Csc. ako súčasť prednášok z predmetu 'Formálne jazyky a automaty'...

Veta 2: K ubovolnmu LBA A existuje kontextov gramatika G tak, e $L(G) = L(A) - \{\epsilon\}$.
Dôkaz: Dôkaz tvrdenia poskytuje doc. RNDr. Branislav Rovan, Csc. ako súčasť prednášok z predmetu 'Formálne jazyky a automaty'...

Využitím vety 1 a vety 2 a konštrukciou s dôkazom poskytnutou v tomto dokumente sme pomocou lineárne ohraničených automatov dokázali uzavretosť triedy kontextových jazykov na inverzný homomorfizmus.