Zadanie:

Úloha 8.2: Dokážte, že problém zastavenia je pre LBA rozhodnuteľný.

Riešenie:

Definícia:

Hovoríme, že $[u_1u_2\ldots u_i\boldsymbol{q}u_{i+1}\ldots u_n]$ je j-ta konfigurácia výpočtu LBA A nad slovom w, ak sa A po j krokoch výpočtu nad slovom w dostane do konfigurácie $u_1u_2\ldots u_i\boldsymbol{q}u_{i+1}\ldots u_n$.

Lema 1:

Nech LBA A = (K, Σ, Γ, q_0, δ, F), w je slovo na vstupe A. Nech p je počet všetkých konfigurácií automatu A. Potom

(i) $(\exists n)\ (p < n)$

(ii) LBA nezastaví na vstupe $w \Leftrightarrow (\exists j \in \mathbf{N})\ (\exists k \in ¢(\Gamma - \{¢,\$\})^*K(\Gamma - \{¢,\$\})^*\$ \cup K¢(\Gamma - \{¢,\$\}))$ také, že $(j \geq n) \wedge [k]_j$

Dôkaz:

(i) pretože LBA má ohraničenú pásku, je zrejmé, že

$$n = (\ |\Gamma - \{¢,\$\}|\ )^{|w|} * (\ |w| + 2\ ) * |K| + 1$$

(ii) $\Rightarrow$ Predpokladajme, že LBA A nezastaví. Je zrejmé je $(\exists j \in \mathbf{N})\ (\exists k \in ¢(\Gamma - \{¢,\$\})^*K(\Gamma - \{¢,\$\})^*\$ \cup K¢(\Gamma - \{¢,\$\}))$ také, že $(j \geq n)$ a LBA bude po j krokoch výpočtu v konfigurácii k, t.j. podľa definície $[k]_j$

$\Leftarrow$ Tvrdenie plynie z Dirichletovho princípu. Pretože je počet všetkých konfigurácií ohraničený (n) a $\exists k$ taká, že $[k]_j$, t.j. LBA A sa, podľa definície, do nej dostal po viac rovno ako n krokoch $\Rightarrow (\exists i)$ také, že $(i < n) \wedge [k]_i = [k]_j \Rightarrow (\forall l)\ [k]_{i+l} = [k]_{j+l} \Rightarrow$ LBA sa cyklí a nezastaví.

Konštrukcia Turingovho stroja:

Na základe Lemy 1 deterministický Turingov stroj TS zostrojíme nasledovne:

1) Na zlom kóde LBA alebo slova w TS zastaví
2) Zo vstupu <LBA,w> podľa Lemy 1 vyráta také n, že n je väčšie ako počet všetkých konfigurácií LBA a zdvojí prvých n políčok pásky
3) Za vstup <LBA,w> vygeneruje a nakopíruje počiatočnú konfiguráciu LBA oddelenú € a ukončenú @. ({ €, @} $\not\subset \Gamma_{LBA}$)
4) TS začne spracovávať kofiguráciu, t.j. označí ju, na koniec pásky vygeneruje a nakopíruje podľa δ-funkcie LBA všetky nasledovné konfigurácie oddelené #. (# $\notin \Gamma_{LBA}$)
5) Hlava sa presunie na prvú ešte nespracovanú konfiguráciu na páske. Ak pri prechde z práve spracovanej konfigurácie na nasledujúcu bol prečítaný znak @, zapíše sa aj na koniec pásky a zvýši sa počítadlo o 1.

Ak je stav počítadla väčší ako n automat odpovie *„LBA nezastaví"* a zastaví sa. V opačnom prípade začne spracovávať ďalšiu konfiguráciu (bod 4) ak už nie je koniec pásky. Inak odpovie *„LBA zastaví"* a TS sa zastaví.

Dôkaz správnosti konštrukcie:

Na dôkaz správnosti konštrukcie musíme dokázať nasledujúce tvrdenia.

Tvrdenie 1:

Popísaný Turingov stroj zastaví na každom vstupe.

Tvrdenie 2:

Popísaný Turingov stroj odpovie *„LBA nezastaví"* $\Leftrightarrow$ LBA na slove w nezastaví.

Tvrdenie 3:

Popísaný Turingov stroj odpovie *„LBA zastaví"* $\Leftrightarrow$ LBA na slove w zastaví.

Lema 2:

Nech k je práve spracovávaná konfigurácia LBA Turingovým strojom, p je stav počítadla TS, h je úroveň v strome T všetkých konfigurácií LBA taká, že $k \in T[h]$.
Potom $h = p+1$.

Dôkaz:

Dôkaz urobíme matematickou indukciou vzhľadom na spracovávanú konfiguráciu.

1° Uvažujme, že Turingov stroj spracováva počiatočnú konfiguráciu $k_0 \in T[1]$. Na začiatku $p = 0$. Teda platí $1 = 0 + 1$, t.j. $h = p+1$

2° Nech TS spracováva konfiguráciu $k_i \in T[h]$. Ukážeme, že pri spracovávaní $k_j \in T[h+1]$ platí $h + 1 = p + 1 + 1$.
Podľa indukčného predpokladu $h = p + 1$. Podľa popisu činnosti je niekde na páske za konfiguráciou k_i znak @. Pri spracovaní konfigurácie k_i sa všetky nasledujúce konfigurácie k_j nakopírujú na koniec pásky (t.j. za znak @). Pred začatím spracovávania konfigurácie k_j sa teda musí prečítať @, čím sa zvýši počítadlo o 1. Teda $h + 1 = p + 1 + 1 \Rightarrow h = p + 1$.

Dôkaz tvrdenia 1:

Uvažujme popis činnosti TS. Ak je vstup nekorektný TS zastaví. Na dobrom vstupe začne TS simulovať prácu LBA prehľadávaním stromu jeho konfigurácií do šírky. Úroveň na ktorej sa práve nachádza udáva podľa Lemy 2 počítadlo p. Ak počítadlo $p > n$ (n je pevne stanovená hranica; viď Lema 1 bod (i)) potom TS rovnako zastaví.

Dôkaz tvrdenia 2:

$\Rightarrow$ Nech p udáva stav počítadla, n je počet všetkých konfigurácií LBA. Podľa popisu činnosti musel nastať prípad, kedy $p > n$ (podľa Lemy 1 bod (i) je n konečné) a preto na základe Lemy 1 bod (ii) a Lemy 2 LBA na vstupe w nezastaví.

$\Leftarrow$ Nech LBA na vstupe w nezastaví. Na základe Lemy 1 bod (ii) ($\exists\, j \in \mathbf{N}$) ($\exists\, k \in$ ¢(Γ - {¢,$})*K($\Gamma$ - {¢,$})*$ $\cup$ K¢(Γ - {¢,$})) také, že ($j \geq n$) $\wedge$ $[k]_j$. $\Rightarrow$ ($\forall m$)

$(\exists h)$ také, že $(h > m) \wedge [k]_m$, t.j. strom konfigurácií ma nekonečnú hĺbku. Podľa Lemy 2 $(\exists p)$ p je stav počítadla, také, že $p > n$, t.j. počítadlo pretečie a TS podľa popisu činnosti odpovie „LBA nezastaví".

Dôkaz tvrdenia 3:

$\Rightarrow$ TS odpovie „TS zastaví", t.j. TS spracoval všetky konfigurácie LBA na páske a $p < n$. $\Rightarrow$ výška stromu všetkých konfigurácií LBA je menšia ako n, preto LBA na vstupe w zastaví.

$\Leftarrow$ Nech LBA na vstupe w zastaví. Potom v každej vetve stormu všetkých konfigurácií LBA $(\exists\, u_1u_2\ldots u_i\mathbf{q}u_{i+1}\ldots u_n\ )\ (\ \exists j\ )$ také, že $(j < n) \wedge ([u_1u_2\ldots u_i\mathbf{q}u_{i+1}\ldots u_n]_j) \wedge (\delta(\mathbf{q}, u_{i+1}) = \varnothing)$. TS pri spracovávaní poslednej konfigurácie nenakopíruje na koniec pásky žiadne nasledujúce, t.j. v ďalšom kroku príde na koniec pásky a preto podľa popisu činnosti odpovie „LBA zastaví"