4.4.

<u>*Zadanie.*</u>

Ukážte, že trieda $\mathcal{L}_{RE}$ je uzavretá na cyklický posun Cycle.
$cycle(w) = \{w' \mid \exists u, v \in \Sigma^* : uv = w \wedge vu = w'\}$
$Cycle(L) = \{w' \mid \exists w \in L : w' \in Cycle(w)\}$

<u>*Odpoveď.*</u>

Nech je daný TS $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$.
Kvôli možnej nejednoznačnosti uvádzame: B je Blank a $B \in \Gamma$. Konfigurácia $(q, u \upharpoonright w)$ značí, že na páske máme slovo uw, sme v stave q a hlava je na prvom znaku slova w. Automat akceptuje akceptačným stavom.

Zostrojíme $A' = (K', \Sigma, \Gamma, \delta', q_{00}, F)$. Pričom $K' = K \cup \{q_{00}, q_V\} \cup \{q_a \mid x \in \Sigma\}$
Súčasne predpokladáme, že novozavedené stavy nie sú v pôvodnom automate.
δ' obsahuje pôvodnú δ funkciu a nasledujúce vzťahy:

(1) $\delta'(q_{00}, B) = \{(q_0, B, 0)\}$
(2) $\delta'(q_{00}, a) = \{(q_0, a, 0), (q_a, B, 1)\}$ pre $a \in \Sigma$
(3) $\delta'(q_a, b) = \{(q_a, b, 1)\}$ pre $a, b \in \Sigma$
(4) $\delta'(q_a, B) = \{(q_V, a, 0)\}$ pre $a \in \Sigma$
(5) $\delta'(q_V, a) = \{(q_V, a, -1)\}$ pre $a \in \Sigma$
(6) $\delta'(q_V, B) = \{(q_{00}, B, -1)\}$

<u>*Dôkaz.*</u>

Označme $L = Cycle(L(A))$.

Dokážme, že novopridané hodnoty δ funkcie realizujú presun prvého písmenka slova na koniec slova a posunutie hlavy znovu na začiatok.

Lema.

Nech $a \in \Sigma$, $x \in \Sigma^*$ Z konfigurácie $(q_a, \upharpoonright Bx)$ sa vždy dostaneme do $(q_{00}, \upharpoonright xa)$.

Dôkaz: Novo dodané hodnoty δ' sú až na pravidlo 2 jednoznačné a to nepoužijeme. Takže: $(q_a, \upharpoonright Bx) \overset{3}{\Rightarrow}{}^* (q_a, Bx \upharpoonright) \overset{4}{\Rightarrow} (q_V, x \upharpoonright a) \overset{5}{\Rightarrow}{}^* (q_V, \upharpoonright Bxa) \overset{6}{\Rightarrow} (q_{00}, \upharpoonright xa)$. Čo sme chceli ukázať.

Prázdne slovo.

Ak máme na vstupe A' prázdne slovo, tak ideme hneď do stavu q_0 a spustíme nad prázdnou páskou automat A.

Takže $\varepsilon \in L(A) \Leftrightarrow \varepsilon \in L(A')$. Keďže vieme, že $\varepsilon \in L(A) \Leftrightarrow \varepsilon \in L$, tak automat A' spracuje ε správne.

$L(A') \subseteq L$.

Majme slovo $\varepsilon \neq ax \in L(A')$, kde $a \in \Sigma$.

Na začiatku sme v konfigurácii $(q_{00}, \upharpoonleft ax)$. Z tohto stavu sa možme dostať do $(q_a, \upharpoonleft Bx)$ alebo $(q_0, \upharpoonleft ax)$.

Použitím vyššie uvedenej lemy dostávame, že sa môžme dostať do $(q_{00}, \upharpoonleft xa)$ alebo $(q_0, \upharpoonleft ax)$. V stave q_{00} sa znovu rozhodneme ako na začiatku.

Takže výpočet musí vyzerať $(q_{00}, \upharpoonleft ax) \Rightarrow^* (q_0, \upharpoonleft b)$, kde $b \in cycle(ax)$.

Keďže ax akceptujeme, tak niektoré b musíme akceptovať automatom A. Takže $ax \in cycle(b) \wedge b \in L(A) \rightarrow ax \in L$. Čo sme chceli ukázať.

$L \subseteq L(A')$.

Majme $\varepsilon \neq uv \in L$, bez ujmy na všeobecnosti môžme predpokladať, že $vu \in L(A)$.

Slovo uv chceme otočiť $\#u$-krát. To dosiahneme tak, že v konfigurácií $(q_{00}, \upharpoonleft aw)$ (na začiatku $aw = uv$) sa $\#u$-krát rozhodneme ísť na stav q_a. Až potom, keď máme konfiguráciu $(q_{00}, \upharpoonleft vu)$ sa rozhodneme ísť na stav q_0. Keďže slovo $vu \in L(A)$, tak úspešne akceptujeme.

Takže $uv \in L(A')$, čo sme chceli ukázať.

Záver.

t.j. pre automat A' platí to čo má. Dokázali sme teda, že trieda $\mathcal{L}_{RE}$ je uzavretá na operáciu Cycle. $\square$