Úloha č. 3.1.

Vypracoval: Marián Hromiak

Zadanie: Majme danú kontextovu gramatiku G. Zostrojte lineárne ohraničený automat (LBA) A, taký že L(G) = L(A). Pri simulácii použite spätné odvodenie (teda postupne na páske robíte spätné kroky až kým sa nedostanete ku σ). Pri dôkaze použite matematickú indukciu.

Vypracovanie:

Máme danú gramatiku $G = (N, T, P, \sigma)$ k nej zostrojíme zodpovedajúci automat $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ takto :
Bez ujmy na všeobecnosti predpokladám, že platí: $X \cap K = \emptyset \ \wedge X \cap \{B\} = \emptyset$.

$$\Sigma := T$$

$$X := T \cup N$$

$$X_B := X \cup \{B\}$$

$$\Gamma := X_B \cup \{¢, \$\}$$

$$S := \{q_{[u,v]} \mid u, v \in X^k\} \quad ; \quad k := max\{|v| \ ; (\exists u)(u \to v \in P)\}$$

$$F := \{q_F\}$$

$$K := \{q_0, q_p, q_k\} \cup S \cup F$$

Delta funkcia:

$$\delta(q_0, x) = \{(q_0, x, 1), (q_0, x, -1)\} \ ; \ x \in X_B \tag{1}$$
$$\delta(q_0, ¢) = (q_0, ¢, 1) \tag{2}$$
$$\delta(q_0, \$) = (q_0, \$, -1) \tag{3}$$
$$\delta(q_0, x) = \{(q_{[u,v]}, x, 0) \ ; \ u \to v \in P\} x \in X \tag{4}$$
$$\delta(q_{[xu,yv]}, y) = (q_{[u,v]}, x, 1) \ ; \ x, y \in X \ ; \ u, v \in X^k - \{\epsilon\} \tag{5}$$
$$\delta(q_{[\epsilon,yv]}, y) = (q_{[u,v]}, B, 1) \ ; \ y \in X \ ; \ v \in X^k - \{\epsilon\} \tag{6}$$
$$\delta(q_{[x,y]}, y) = (q_0, x, 1) \ ; \ x, y \in X \tag{7}$$
$$\delta(q_{[\epsilon,y]}, y) = (q_0, B, 0) \ ; \ y \in X \tag{8}$$
$$\delta(q_0, \sigma) = (q_p, B, 0) \tag{9}$$
$$\delta(q_p, x) = (q_p, x, -1) \ ; \ x \in X_B \tag{10}$$
$$\delta(q_p, ¢) = (q_k, ¢, 1) \tag{11}$$
$$\delta(q_k, B) = (q_k, B, 1) \tag{12}$$
$$\delta(q_k, \$) = (q_F, \$, 0) \tag{13}$$

Skôr ako začnem samotný dôkaz zadefinujem si homomorfizmus h,
$h : (\Gamma \cup K)^* \to X^*$:

$$h(x) = x \ ; \ x \in X$$

$$h(x) = \epsilon \ ; \ x \notin X$$

Lema: Nech l_i je konfiguráciu automatu A po i-tom prechode zo stavu $q_{[x,y]}$ do stavu q_0, pričom uvažujeme konfiguráciu ako reťazec $¢uq_0v\$$ $u, v \in \Sigma^*$. A nech w_{n-i} je vetná forma pri $n - i$-tom kroku odvodenia v gramatike G Potom platí: Pri i-tom prechode zo stavu $q_{[x,y]}$ do stavu q_0 platí: $h(l_i) = w_{n-i}$.

Dôkaz: Dôkaz urobím matematickou indukciou na počet prechodov zo stavu $q_{[x,y]}$ do stavu q_0.

1° Nech n=0, kedže sme ešte ani raz neprešli zo stavu $q_{[x,y]}$ do stavu q_0 a páska sa mení iba v stavoch $q_{[x,y]}$ na páske je vstupné slovo w, ale aj gramtika po n krokoch vygeneruje slovo w čiže indukčný predpoklad platí.

2° Predpokladáme, že to platí pre j prechodov zo stavu $q_{[x,y]}$ do stavu q_0 ukážem, že to platí aj pre $j+1$ prechod (predpokladajme, že počet krokov odvodenia slova v gramatike G je aspoň $j+1$, aby malo zmysel o tom uvažovať). Po j-tom prechode je automat A v konfiguracii l_j čo zodpovedá vetnej forme w_{n-j} gramatiky G. Vetná forma w_{n-j} vznikla z vetnej formy w_{n-j-1} použitím pravidla $u_{n-j} \to v_{n-j}$. Nech $w_{n-j} = y_{n-j_1} y_{n-j_2} \dots y_{n-j_d}$,a nech i_j je index od na ktorom začína v_{n-j}. Nech $u_{n-j} = a_1 a_2 \dots a_{n_{n-j}}$ a $v_{n-j} = b_1 b_2 \dots b_{m_{n-j}}$. Aby automat A urobil ekvivalentný výpočet potrebuje dostať hlavu na miesto kde začína v_{n-j} (t.j. aby platilo: Nech konfigurácia automatu A je $¢ u q_0 z_{n-j} v\$$ a platí $h(z_{n-j}) = v_{n-j}$). To sa dosiahne ľahko vhodným použitím vetvy (1) delta funcie je možné presunúť hlavu automatu na miesto, kde sa začína v_{n-j} a automat A môže prejsť do stavu $q_{[u_{n-j}, v_{n-j}]}$. Automat A sa môže dostať zo stavu $q_{[u_{n-j}, v_{n-j}]}$ so do stavu q_0 iba tak, že prejde stavmi $q_{[a_1 a_2 \dots a_{n_{n-j}}, b_1 b_2 \dots b_{m_{n-j}}]}$, $q_{[a_2 \dots a_{n_{n-j}}, b_2 \dots b_{m_{n-j}}]} \cdots q_{[\epsilon, b_{m_{n-j}}]}$ alebo $q_{[a_1 a_2 \dots a_{n_{n-j}}, b_1 b_2 \dots b_{m_{n-j}}]}$, $q_{[a_2 \dots a_{n_{n-j}}, b_2 \dots b_{m_{n-j}}]} \cdots q_{[a_{n_{n-j}}, b_{m_{n-j}}]}$ v závislosti na tom či $|u_{n-j}| = |v_{n-j}|$ alebo $|u_{n-j}| < |v_{n-j}|$. Prechodom cez tieto stavy sa zmeni konfigurácia automatu z $¢ u q_0 z_{n-j} v\$$ na $¢ u z_{n-j-1} q_{[x,y]} v\$$ kde platí $h(z_{n-j-1}) = u_{n-j} = v_{n-j-1}$. Po zmene stavu z $q_{[x,y]}$ do stavu q_0 teda určite platí indukčný predpoklad.

Tým máme dokázanú lemu.

$\mathbf{L(G) \subseteq L(A)}$:

Nech $w \in L(G)$ t.j. existuje odvodenie $\sigma \Rightarrow_G u_1 \Rightarrow_G u_2 \Rightarrow_G \dots \Rightarrow_G u_n = w$ a nech pravidlá použité v jednotlivých krokoch sú $v_i \to z_i$. Je potrebne ukázať že existuje akceptačný vypočet automatu A na slove w. Podľa lemy platí $h(l_i) = w_{n-i}$. To znamená, že po n prechodoch je páske už iba σ. Pozrime sa čo je na páske automatu po $n-1$ prechodoch. Na paske podľa lemy je vetná forma, ktorá zodpovedá prvému odvodeniu v gramatike. Ako vidno indukciou je ľahké ukázať, že taký výpočet existuje (keďže dôkaz lemy je konštruktívný je tam ukázabé ako musí vyzerať taký výpočet).

Máme teda ukázané že automat simuluje prácu gramatiky (ale odzadu), ale ešte traba dokončiť výpočet automatu a doviesť ho k akceptačnému stavu. Sme v konfigurácii $¢ u q_0 \sigma v\$$ pričom $u, v \in B^*$. Teraz automat si nederministicky (napovie mu dobrá víla) vyberie (9) vetvu delta funkcie a zmení konfiguráciu na $¢ u q_p B v\$$. Potom prejde na začiatok pásky vďaka (10) vetve delta funkcie, kde sa konfigurácia zmení na $¢ q_k v\$$; $v \in B^*$ ((11) vetva delta funkcie). Z indukčného predpokladu vyplýva: Po n-tom prechode zo stavu $q_{[x,y]}$ do stavu q_0 je na páske automatu iba σ alebo B. Keďže sme σ zmenili na B (pri zmene stavu z q_0 do q_p) sú na páske iba znaky B. To znamená, že automat može prejsť z konfigurácia $¢ q_k v\$$; $v \in B^*$ na konfiguráciu $¢ v q_k \$$; $v \in B^*$. Z tejto konfigurácie ako jedinej môže prejsť do akceptačného stavu, t.j. automat A vstupné slovo akceptuje.

$\mathbf{L(A) \subseteq L(G)}$:

Nech $w \in L(a)$ t.j. existuje akceptačný výpočet v automate A nad slovom w. Nech ten výpočet prebieha takto:

$q_0 ¢ w\$ \vdash_A{}^* ¢ u q_0 v_1 v\$ \vdash_A ¢ u q_{[u_1,v_1]} v_1 v\$ \vdash_A{}^* ¢ u z_1 q_0 v\$ \vdash_A{}^* ¢ u q_0 v_2 v\$ \vdash_A ¢ u q_{[u_2,v_2]} v_2 v\$ \vdash_A{}^* ¢ u z_2 q_0 v\$ \dots$
$\dots \vdash_A{}^* ¢ u q_0 v_n v\$ \vdash_A ¢ u q_{[u_n,v_n]} v_n v\$ \vdash_A{}^* ¢ u z_n q_0 v\$ \vdash_A{}^* ¢ v q_f \$$
$h(z_i) = u_i \; ; u_i \to v_i \in P \; ; \; i \in \{1, \dots, n\}$
$u, v \in X_B{}^*$ su momentálne nezaujímavé časti pásky automatu.

Potrebujem nájsť odvodenie slova w v gramatike G, ale nie je nič ľahšie pretože ak automat akceptoval slovo tak výpočet na slove prebiehal tak ako je ukázane hore a pri odvodení slova v gramatike budú postupne použité pravidlá $u_n \to v_n$, $u_{n-1} \to v_{n-1}$, $\dots$,$u_1 \to v_1$,kde $u_n = \sigma$.Použitie týchto pravidiel v takomto poradí jednoznačne povedú k vygenerovaniu vstupného (a aj akceptovaného) slova automatu A ako je ukázané v leme.