PREZENTÁCIA : EKVIVALENCIA DEFINÍCIÍ CSG, MARIÁN MARCINČÁK, 2i3

Zadanie :

Dokazte ekvivalenciu Chomského definície a štandardnej definície kontextových gramatík (CSG).

Pre CSG s množinou terminálov T a množinou neterminálov N

- Chomského definícia je, že pravidlá CSG majú tvar „$u\alpha v \rightarrow u\beta v$“, kde $u, v \in (N \cup T)^*$, $\alpha \in N$, $\beta \in (N \cup T)^+$
- Štandardná definícia je, že pravidlá CSG majú tvar „$u \rightarrow v$“, kde $u \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*$, $v \in (N \cup T)^+$ a zároveň $|u| \leq |v|$.

Riešenie :

Na dôkaz ekvivalencie dokážeme dve vety, ktoré hovoria, že ku každej gramatike podľa jednej definície vieme zostrojiť ekvivalentnú gramatiku podľa druhej definície, t.j., že jazyk generovaný prvou gramatikou je ten istý ako jazyk generovaný druhou. Na dôkaz druhej vety použijeme pomocnú lemu, pomocou ktorej budeme môcť konštruovať ekvivalentnú gramatiku v rovine neterminálov, ktoré sa nakoniec prepíšu na terminály, t.j. dokážeme v nej ekvivalenciu generovaných jazykov.

Veta 1 :

K ľubovoľnej gramatike G_1, ktorej pravidlá spĺňajú vlastnosti Chomského definície kontextových gramatík, existuje taká gramatika G_2, s pravidlami podľa štandardnej definície CSG, že platí $L(G_1) = L(G_2)$.

Dôkaz :

Toto tvrdenie je zrejmé, pretože pravidlá podľa Chomského definície, ktoré majú tvar „$u\alpha v \rightarrow u\beta v$“, kde $u, v \in (N \cup T)^*$, $\alpha \in N$, $\beta \in (N \cup T)^+$ sú automaticky aj pravidlá podľa štandardnej definície : $u' \rightarrow v'$, kde $u' \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*$, $v' \in (N \cup T)^+$ a $|u'| \leq |v'|$. Totiž stačí substituovať $u' := u\alpha v$ a $v' := u\beta v$. Keďže $\alpha \in N$ a $u, v \in (N \cup T)^*$ tak platí, že $u' \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*$ a keďže $\beta \in (N \cup T)^+$, zrejme aj $v' \in (N \cup T)^+$. Posledná vlastnosť, že $|u'| \leq |v'|$ je zrejmá, pretože slová u' a v' sa líšia jen v podslovách $\alpha \in N$ a $\beta \in (N \cup T)^+$, pre ktoré platí vlastnosť $1=|\alpha| \leq |\beta|$. Keďže $G_2=G_1$, platí aj tvrdenie $L(G_1)=L(G_2)$.

Lema 1 :

Nech G je CS gramatika podľa štandardnej definície CSG. Nech $P = \{ p_i = u_1 v_1 ... u_n v_n \rightarrow u_{n+1} v_{n+1} ... u_{n+m} v_{n+m} \mid u_i = a_{i,1} ... a_{i,si} \in T^*, v_i = b_{i,1} ... b_{i,ti} \in N^*, i \in \{1,...,n+m\}, a_{i,j} \in T, b_{i,j} \in N \}$. Potom $G_1 = (N_1 = N \cup \{ \xi_a \mid a \in T \}, T = T_1, P_1, \sigma = \sigma_1)$, kde $P_1 = \{ p_i' = u_1' v_1' ... u_n' v_n' \rightarrow u_{n+1}' v_{n+1}' ... u_{n+m}' v_{n+m}' \mid v_i' = v_i \wedge u_i' = \xi_{ai,1} ... \xi_{ai,si}, u_i = a_{i,1} ... a_{i,si} \in T^*, i \in \{1,...,n+m\} \} \cup \{ \xi_a \rightarrow a, a \in T \}$, je ekvivalentná gramatike G.

(: *Jednoducho povedané, ak v každom pravidle nahradíme terminály ich symbolickými ξ–neterminálmi a pridáme pravidlá prepisujúce tieto neterminály na dané terminály, dostaneme ekvivalentnú gramatiku.* :)

Dôkaz :

- $L(G) \subseteq L(G_1)$: Nech $w \in L(G)$, $\{p_{ik}\}$ je post. pravidiel odvodenia v G. Slovo w vieme odvodiť v G_1, ak použije postupne pravidlá $\{p_{ik}'\}$ a následne príslušné ξ-pravidlá.
- $L(G_1) \subseteq L(G)$: Pri tejto inklúzii treba zodpovedať jednu dôležitú otázku : „Čo keď použijeme nejaké ξ-pravidlo skôr ako skončíme s používaním neterminálových pravidiel ?“. Je však zrejmé, že v takomto prípade sa odvodenie zastaví, t.j. neodvodíme slovo, ktoré patrí do G_1 a teda nie je splnená postačujúca podmienka. ξ-pravidlá teda môžeme použiť len v prípade, že vetná forma obsahuje len samé ξ-neterminály.

Túto lemu využijeme v nasledujúcej vete. Vďaka nej môžeme predpokladať, že sa bavíme len v rovine neterminálových pravidiel a pravidlá prepisujúce na terminály použijeme až na záver každého odvodenia. Tento predpoklad nám uľahčí konštrukciu ekvivalentnej gramatiky.

Veta 2 :

K ľubovoľnej gramatike G_1, ktorej pravidlá spĺňajú vlastnosti štandardnej definície kontextových gramatík, existuje taká gramatika G_2, s pravidlami podľa Chomského definície CSG, že platí $L(G_1) = L(G_2)$.

Konštrukcia :

Podľa lemy 1 môžeme predpokladať, že pravidlá gramatiky G_1 obsahujú buď len neterminály, alebo sú to pravidlá prepisujúce neterminál na prislúchajúci terminál,t.j. podľa lemy zostrojíme ku gramatike G_1 ekvivalentnú gramatiku, s ktorou budeme pracovať. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme taktiež predpokladať, že jednotlivé pravidlá z P_1 sú ohodnotené číslami od 1 (= pravidlo $\sigma \rightarrow u$, $u \in N^* \cup T$) po $|P_1| = r$. Pravidlá z P_1 teda budeme značiť ako p_1 až p_r. Gramatiku G_2 zostrojíme z gramatiky G_1 nasledovne :

$\sigma_2 = \sigma_1$, $T_2 = T_1$,

$N_2 = N_1 \cup \{ \xi_{k,i} \mid p_k = a_1...a_n \rightarrow b_1...b_m \in P_1, a_1,...,a_n,b_1,...,b_m \in N, 1 \leq k \leq r, 1 \leq i \leq m \}$,

$P_2 = \cup H_i (i \in \{1,..,r\}) \cup \{ \xi_a \rightarrow a, a \in T \}$

$H_i = \{ p_{i,1} = \boxed{a_1}...a_n \rightarrow \boxed{\xi_{i,1}}\, a_2...a_n$,

$p_{i,2} = \xi_{i,1}\, \boxed{a_2}...a_n \rightarrow \xi_{i,1}\, \boxed{\xi_{i,2}}\, a_3...a_n$, ...

$p_{i,n} = \xi_{i,1} ... \xi_{i,n-1}\, \boxed{a_n} \rightarrow \xi_{i,1} ... \xi_{i,n-1}\, \boxed{\xi_{i,n} ... \xi_{i,m}}$,

$p_{i,n+1} = \boxed{\xi_{i,1}} ... \xi_{i,m} \rightarrow \boxed{b_1}\, \xi_{i,2} ... \xi_{i,m}$,

$p_{i,n+2} = b_1\, \boxed{\xi_{i,2}} ... \xi_{i,m} \rightarrow b_1\, \boxed{b_2}\, \xi_{i,3} ... \xi_{i,m}$, ...

$p_{i,n+m} = b_1 ... b_{m-1}\, \boxed{\xi_{i,m}} \rightarrow b_1 ... b_{m-1}\, \boxed{b_m}$

$\mid p_i = a_1...a_n \rightarrow b_1...b_m \in P_1, a_1,...,a_n,b_1,...,b_m \in N \}$

Pravidlá $p_{i,1}$ až $p_{i,n}$ budeme označovať ako časť A a ostatné pravidlá z H_i ako časť B.

Popis konštrukcie :

Pre každé pravidlo $p_i \in P_1$ (okrem pravidiel prepisujúcich na terminály, ktoré zostanú zachované – spĺňajú vlastnosti Chom. definície) postupne po jednom prepisujeme neterminály z ľavej strany, lebo Chomského definícia nám umožňuje v 1 pravidle prepísať len 1 neterminál α na $\beta \in (N \cup T)^+$, pričom ostatné neterminály z ľavej stany pravidla musia zostať zachované. Gramatika z konštrukcie teda daný neterminál a_k (z ľavej strany pôvodného pravidla z P_1) prepisuje na nový neterminál $\xi_{i,k}$ (ak $1 \leq k \leq n-1$), alebo na skupinu neterminálov $\xi_{i,n} ... \xi_{i,m}$ (ak $k = n$). Následne sa postupne nové $\xi_{i,j}$-neterminály prepisujú na neterminály z pravej strany pôvodného pravidla z P_1. $\xi_{i,j}$-neterminály sú zavedené kvôli tomu, aby počas postupného prepisovania nemohli iné pravidlá (z iného H_i) ovplyvniť priebeh odvodzovania daného slova.

Príklad (nutnosť $\xi_{i,j}$-neterminálov):

V prípade, že by sme nezaviedli $\xi_{i,j}$-neterminály, mohla by nastať nasledujúca situácia : $P_1 = \{ ABC \rightarrow EFGH, \boxed{EBC} \rightarrow BBB, ... \} \Rightarrow H_1 = \{ ABC \rightarrow EBC, \boxed{EBC} \rightarrow EFC, EFC \rightarrow EFGH \}$. V tomto prípade by pri odvodzovaní mohli vzniknúť nové slová a preto musíme požadovať disjunktnosť ľavých strán pravidiel z P_1 a pravidiel z H_i, ktoré obsahujú na ľavej strane $\xi_{i,j}$-neterminál.

Dôkaz :

- Najprv dokážeme, že jednotlivé pravidlá $p_i \in H_i$ spĺňajú vlastnosti Chomského definície CSG (ako už vieme, pravidlá z množiny $\{ \xi_a \rightarrow a, a \in T \}$ sú podľa Chom. def.). To však vyplýva zo spôsobu konštrukcie gramatiky, kde až na posledné pravidlo z časti A prepisujeme len 1 neterminál z ľavej strany na 1 neterminál z pravej, pričom sa ostatné

neterminály nemenia, t.j. $u\alpha v \rightarrow u\beta v$, kde $u, v \in N^*$, $\alpha,\beta \in N \Rightarrow u, v \in (N \cup T)^*$, $\alpha \in N$, $\beta \in (N \cup T)^+$. Posledné pravidlo z časti A je jediné, ktoré pridáva neterminály, avšak aj tu sú vlastosti Chom. definície splnené, lebo $\alpha \in N$,$\beta \in N^+ \Rightarrow \alpha \in N$, $\beta \in (N \cup T)^+$.

- Teraz dokážeme najdôležitejšiu vlastnosť – že $L(G_1) = L(G_2)$, t.j. že naša skonštruovaná gramatika G_2 je ekvivalentná s gramatikou G_1. Dokážeme dve inklúzie :
  - $L(G_1) \subseteq L(G_2)$:

    Nech slovo $w \in L(G_1)$, t.j. existuje odvodenie slova w v gramatike G_1. Nech $\{ p_k \}$ ($k \in \{1,...,r = |P_1|\}$) je postupnosť použitých pravidiel z P_1 pri odvodzovaní slova w. Podľa konštrukcie vieme odvodiť slovo $w \in L(G_1)$ aj v gramatike G_2 a to nasledovne : miesto pravidla p_i z postupnosti $\{ p_k \}$ použijeme postupne pravidlá $p_{i,1},...,p_{i,m} \in H_i$, ktoré simulujú výpočet prebiehajúci pri použití p_i, postupným prepisovaním jednotlivých neterminálov. Teda $[w \in L(G_1) \Rightarrow w \in L(G_2)] \Rightarrow L(G_1) \subseteq L(G_2)$.
  - $L(G_2) \subseteq L(G_1)$:

    Nech $w \in L(G_2)$, t.j. existuje odvodenie slova w v gramatike G_2. Našim cieľom je ukázať, že odvodenie slova v G_2 vieme rozložiť na úseky, v ktorých sa používajú výlučne len pravidlá z nejakého H_i a to v jedinom možnom poradí, ktoré vlastne zodpovedá použitiu jedného pravidla z gramatiky G_1. Toto dokážeme použitím matematickej indukcie vzhľadom na krok odvodenia (úseky z H_i) :

    1. Ako vyzerá odvodenie v G_2? Začíname pravidlom $p_{1,1} = \sigma_2 \rightarrow \xi_{i,1} ... \xi_{i,m}$, ktoré patrí do H_1. Teraz dokážeme, že jediné pravidlo, ktoré sme ako ďalšie mohli použiť, je pravidlo $p_{1,2} \in H_1$ (nasledujúce pravidlo, t.j. 1.pravidlo z časti B : $\xi_{i,1} ... \xi_{i,m} \rightarrow b_1 \xi_{i,2} ... \xi_{i,m}$).

       Na tomto mieste je vhodné podotknúť, že aby sme odvodili slovo $w \in L(G_2)$, tak sme museli použiť ďalšie pravidlo z H_i, pretože $\xi_{i,j}$-neterminály nedokážeme prepísať použitím 1 pravidla na terminály (to vieme len v prípade, že sa jedná o neterminál b_i, pre ktorý existuje pravidlo $b_i \rightarrow a$, $a \in T$). Odvodenie slova w môžeme skončiť jedine na konci celej časti pozostávajúcej z pravidiel z H_i, t.j. po použití pravidla $b_1 ... b_{m-1} \xi_{i,m} \rightarrow b_1 ... b_m$.

       Je zrejmé, že nasledujúce pravidlo nie je z H_i, kde $i \neq 1$, pretože neterminály $\xi_{1,i}$, $i \in \{1,...,m\}$, sa používajú výlučne len v H_1 (preto používame $\xi_{i,j}$-neterminály). Mohli sme použiť iné ako nasledujúce pravidlo z H_1? Zrejme nie, pretože pravidlá po $p_{1,2}$ ($= \xi_{i,1} ... \xi_{i,m} \rightarrow b_1 \xi_{i,2} ... \xi_{i,m}$) už majú na ľavej strane aspoň 1 neterminál b_i ($i \in \{1,...,m\}$) a dĺžka ľavej strany nie je menšia ako dĺžka pravej strany v pravidle $p_{1,2}$. Indukciou sa ľahko ukáže, že vždy môžeme použiť len to nasledujúce pravidlo (vyplýva to z faktu, že ľavé strany majú vždy rovnakú dĺžku a postupne ubúda počet $\xi_{i,j}$-neterminálov), až po posledné pravidlo $b_1 ... b_{m-1} \xi_{1,m} \rightarrow b_1 ... b_m \in H_1$, po ktorom môžeme použiť aj pravidlo z inej množiny H_i. Na prvý pohľad vidno, že ekvivalentné odvodenie ako v tomto úseku pravidiel z H_1 môžeme dosiahnuť v G_1 použitím 1. pravidla $\sigma_1 \rightarrow b_1 ... b_m$ (práve z tohto pravidla sme skonštruovali H_1).

    2. Nech tvrdenie platí pre prvých k úsekov, t.j. $\{ p_{i1,1},...,p_{i,n1}, p_{i2,1},...,p_{i2,n2},..., p_{ik,1},...,p_{ik,nk} \}$, kde $i_s \in \{1,...,r\}$, $s \in \{1,...,k\}$, $H_1 = \{p_{1,1},...,p_{1,n1}\},..., H_r = \{p_{r,1},...,p_{r,nr}\}$, použitých pri odvodzovaní slova w v gramatike G_2, kde použitie pravidiel $p_{i,j} \in H_i$ je ekvivalentné použitiu pravidla $p_i \in P_1$ (I. P.). Dokážeme,

že tvrdenie platí pre $k+1$ úsekov, t.j., že aj pre použitie ďalších pravidiel $p_{ik+1,j}$ platí ekvivalencia s pravidlom $p_{ik+1} \in P_1$.

Dôkaz tohto kroku zodpovedá zovšeobecneniu bázy indukcie. Podľa I.P. je prvých k úsekov ekvivalentných s prislúchajúcimi pravidlami z P_1. Nech $a_1...a_n$ je pravá strany (prvého) nasledujúceho pravidla $p_{j,1} = a_1...a_n \rightarrow \xi_{j,1}$ $a_2...a_n \in H_j$, $j = i_{k+1}$. Opäť je zrejmé, že pravidlo, ktoré nasleduje je z množiny H_j. Nemohli sme taktiež použiť žiadne pravidlo z časti B množiny H_j, pretože jedine 1.pravidlo z časti B má na zač. ľavej strany neterminál, avšak nasleduje postupnosť $\xi_{i,j}$-neterminálov a platí $|\xi_{j,1}\, a_2...a_n| \leq |\xi_{j,1} ... \xi_{j,m}|$ a preto toto pravidlo môže nasledovať jedine ak $a_2...a_n = \varepsilon$, t.j. ak je to nasledujúce pravidlo. Ostatné pravidlá z časti A (ak $a_2...a_n \neq \varepsilon$) majú rovnakú dĺžku ako $p_{j,1}$, ale jedine ľavá strana pravidla, ktoré nasleduje ($p_{j,2}$) má rovnaký tvar ako pravá strana $p_{j,1}$. Teda je to jediné možné pravidlo, ktoré môže nasledovať. Indukciou by sme opäť ľahko ukázali, že môžeme použiť len nasledujúce pravidlo, t.j. po $p_{ik+1,j}$ nasleduje $p_{ik+1,j+1}$, $j+1 \leq n$, až po pravidlo $\xi_{i,1} ... \xi_{i,n-1}\, a_n \rightarrow \xi_{i,1} ... \xi_{i,m}$, po ktorom postupujeme ako v báze indukcie. Vidíme, že z post. neterminálov $a_1...a_n$ sme dostali postupnosť $b_1...b_m$, čo zodpovedá p_j-temu pravidlu z P_1. Teda ku každému odvodeniu slova w v G_2 existuje ekvivalentné odvodenie v gramatike G_1, t.j $[w \in L(G_2) \Rightarrow w \in L(G_1)\,] \Rightarrow L(G_2) \subseteq L(G_1)$.

$\Rightarrow L(G_1) = L(G_2)$.

Veta 3 :

Chomského definícia a štandardná definícia kontextových gramatík sú ekvivalentné.

Dôkaz :

Vyplýva z viet 1 a 2.

Príklad (Št. def. → Chom. def.) :

$G = (N = \{\sigma,A,B,C\}, T = \{a,b,c\}, P, \sigma)$ – podľa št. def. CSG

$P = \{ \sigma \rightarrow ABC,\ ABC \rightarrow bac,\ A \rightarrow b,\ B \rightarrow c,\ C \rightarrow a \}$

– Upravíme gramatiku G podľa lemy 1 na gramatiku G_1 :

$G_1 = (N_1 = N \cup \{\xi_a,\xi_b,\xi_c\}, T_1 = T, P_1, \sigma_1 = \sigma)$

$P_1 = \{ \sigma_1 \rightarrow ABC,$

$ABC \rightarrow \xi_b\xi_a\xi_c,$

$A \rightarrow \xi_b,$

$B \rightarrow \xi_c,$

$C \rightarrow \xi_a,\ \}$

$\cup\ \{ \xi_a \rightarrow a,\ \xi_b \rightarrow b,\ \xi_c \rightarrow c \}$

– Podľa konštrukcie z vety 1 zostrojíme G_2 podľa Chom. def. :

$G_2 = (N_1 \cup \{ \xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \xi_{1,3}, \xi_{2,1}, \xi_{2,2}, \xi_{2,3}, \xi_{3,1}, \xi_{4,1}, \xi_{5,1}\}\ , T_1, P_2, \sigma_2 = \sigma_1)$

$P_2 = \{ \cup H_i \} \cup \{ \xi_a \rightarrow a,\ \xi_b \rightarrow b,\ \xi_c \rightarrow c \},\ i = 1,...,4$

$H_1 = \{ \boxed{\sigma_1} \rightarrow \xi_{1,1}\,\xi_{1,2}\,\xi_{1,3}\ ,\ \xi_{1,1}\,\xi_{1,2}\,\xi_{1,3} \rightarrow A\,\xi_{1,2}\,\xi_{1,3}\ ,$

$A\,\xi_{1,2}\,\xi_{1,3} \rightarrow A\,B\,\xi_{1,3}\ ,\ A\,B\,\xi_{1,3} \rightarrow \boxed{A\,B\,C}\ \}$

$H_2 = \{ \boxed{ABC} \rightarrow \xi_{2,1}\,B\,C\ ,\ \xi_{2,1}\,B\,C \rightarrow \xi_{2,1}\,\xi_{2,2}\,C\ ,$

$\xi_{2,1}\,\xi_{2,2}\,C \rightarrow \xi_{2,1}\,\xi_{2,2}\,\xi_{2,3}\ ,\ \xi_{2,1}\,\xi_{2,2}\,\xi_{2,3} \rightarrow \xi_b\,\xi_{2,2}\,\xi_{2,3}\ ,$

$\xi_b\,\xi_{2,2}\,\xi_{2,3} \rightarrow \xi_b\,\xi_a\,\xi_{2,3}\ ,\ \xi_b\,\xi_a\,\xi_{2,3} \rightarrow \boxed{\xi_b\,\xi_a\,\xi_c}\ \}$

$H_3 = \{ \boxed{A} \rightarrow \xi_{3,1}\ ,\ \xi_{3,1} \rightarrow \boxed{\xi_b}\ \}$

$H_4 = \{ \boxed{B} \rightarrow \xi_{4,1}\ ,\ \xi_{4,1} \rightarrow \boxed{\xi_c}\ \}$

$$H_5 = \{ \boxed{C} \rightarrow \xi_{5,1} , \xi_{5,1} \rightarrow \boxed{\xi_a} \}$$

(V H_3, H_4 a H_5 nie sú prechodové neterminály nutné. Zavedené sú len kvôli zjednodušeniu zápisu konštrukcie)

– Je zrejmé, že gramatika G_2 spĺňa vlastnosti Chomského definície CSG.