Úloha 4.2

Martin Očkaják

March 13, 2001

Zadanie:

Pomocou LBA (lineárne ohraničených automatov) dokážte uzavretosť triedy kontextových jazykov na inverzný homomorfizmus. Teda, pre daný LBA A a homorfizmus h zostrojte LBA A', taký $L(A') = h^{-1}(L(A)) = \{w|h(w) \in L(A)\}$.

Riešenie:

Nech $L_1 \in L_{CS} \Rightarrow \exists$ LBA A_1, taký, že $L(A_1) = L_1$. Nech $h : \sum_h^* \to L_1$. Potrebujeme skonštruovať LBA A_2. taký, že $L(A_2) = h^{-1}(L(A_1)) = \{w|h(w) \in L(A_1)\}$, čiže $h(L(A_2)) = (L(A_1)$.

Nech teda $A_1 = (K_1, \sum_1, \Gamma_1, \delta_1, q_{10}, F_1)$ a $A_2 = (K_2, \sum_h, \Gamma_2, \delta_2, q_{20}, F_1)$. Zadefinujme $\Gamma_2 = \{uHv|(H = E \vee H = F) \wedge uv \in L_1 \cup \{\epsilon\}\}$ a $K_2 = K_1 \cup \{q_{20}, q_{21}\}$. Prvky množiny K_1budeme označovať q_{1k}, kde k. Nasleduje konštrukcia funkcie δ_2:

1. $\delta_2(q_{20}, ¢) = \{(q_{20}, ¢, 1)\}$
2. $\delta_2(q_{20}, x) = \{(q_{20}, y, 1)\}, x \in \sum \wedge y \in \Gamma_2 \wedge y = Ez \wedge z = h(x)$
3. $\delta_2(q_{20}, \$) = \{(q_{21}, \$, -1)\}$
4. $\delta_2(q_{21}, y) = \{(q_{21}, y, -1)\}, y \in \Gamma_2$
5. $\delta_2(q_{21}, ¢) = \{(q_{10}, ¢, 0)\}$

6.$\delta_2(q_{1k}, ¢) = \{(q_{1k}, ¢, m)|(q_{1k}, , m) \in \delta_1(q_{1k}, \%)\}, m \in \{0.1\}$

7. $\delta_2(q_{1k}, \$) = \{(q_{1k}, \$, m)|(q_{1k}, \$, m) \in \delta_1(q_{1k}, \$)\}, m \in \{-1.0\}$
8. $\delta_2(q_{1k}, E) = \{(q_{1l}, F, 1)\}$
9. $\delta_2(q_{1k}, F) = \{(q_{1l}, E, -1)\}$
10. $\delta_2(q_{1k}, uHav) = \{(q_{1l}, uHbv, 0)|(q_{1l}, b, 0) \in \delta_1(q_{1k}, a)\}, a, b \in \Gamma_1 \wedge (H = E \vee H = F)$
11. $\delta_2(q_{1k}, Haw) = \{(q_{1l}, Ebw, -1)|(q_{1l}, b, -1) \in \delta_1(q_{1k}, a)\}, a, b \in \Gamma_1 \wedge (H = E \vee H = F)$
12. $\delta_2(q_{1k}, wHa) = \{(q_{1l}, wFb, 1)|(q_{1l}, b, 1) \in \delta_1(q_{1k}, a)\}, a, b \in \Gamma_1 \wedge (H = E \vee H = F)$
13. $\delta_2(q_{1k}, uaHv) = \{(q_{1l}, uEbv, 0)|(q_{1l}, b, -1) \in \delta_1(q_{1k}, a)\}, a, b \in \Gamma_1 \wedge (H = E \vee H = F)$
14. $\delta_2(q_{1k}, uHacv) = \{(q_{1l}, ubFcv, 0)|(q_{1l}, b, 1) \in \delta_1(q_{1k}, a)\}, a, b, c \in \Gamma_1 \wedge (H = E \vee H = F)$

Popis automatu:

Na začiatok niekoľko užitočnývh definícií:

Ekvivalencia slov: Budeme hovoriť, že slovo $w \in L_1^*$ je ekvivalentné slovu $t \in t = t_1...t_n \in \Gamma_2^*$, $(t_i = u_i H v_i \wedge (H = E \vee H = F) \wedge u_i v_i \in L_1)$, práve vtedy, keď $w = u_1 v_1 ... u_n v_n$.

Pozícia fiktívnej hlavy: Budeme hovoriť, že fiktívna hlava automatu A_2 je v slove ekvivalentom slovu $t = t_1...t_n \in \Gamma_2^*$ na písmene x, práve vtedy, keď A_2 je v konfigurácii $(q_{1x}, \cent t_1...t_n \$, d)$, kde $(t_d = u_d H x v_d)$. Ďalej budeme hovoriť, že fiktívna flava je na znaku % resp. \$, práve vtedy, keď je A_2 v konfigurácii $(q_{1x}, \cent t_1...t_n \$, 0)$ resp. $(q_{1x}, \cent t_1...t_n \$, n+1)$.

Ekvivalencia stavov: Budeme hovoriť, že automaty A_1 a A_2 sa nachádzajú v ekvivalentných stavoch, práve vtedy, keď A_1 je v konfigurácii $(q_x, \cent u \$, d_1)$ a A_2 je v konfigurácii $(q_{1x}, \cent v \$, d_2)$.

LBA A_2 pracuje nasledovým spôsobom:

1. Prepíše všetky písmená na páske na symboly reprezentujúce obrazy týchto písmen podľa homomorfizmu h. Obrazmi môžu byť aj slová, prípadne prázdne slovo a preto A_2 používa špeciálnu množinu pracovných symbolov Γ_2. Každý prepísaný symbol sa zároveň bude začínať špeciálnym znakom E reprezentujúcim fiktívnu hlavu. Každý takýto pracovný symbol môžeme potom chápať zároveň ako slovo z L_1, v ktorom je označená pozícia fiktívnej hlavy. Zároveň je potom celé pracovné slovo ekvivalentné s nejakým slovom $w \in L_1$. V tejto fáze sa použivajú pravidlá 1 a 2.

2. Presunie hlavu späť na začiatok pásky. V tejto fáze sa používajú pravidlá 2,3 a 4.

3. Simuluje výpočet automatu A_1 nad slovom w. Pre každý krok výpočtu automatu A_1 mení pracovné symboly a posúva fiktívnu hlavu, tak aby po každom kroku výpočtu boli pracovné slová automatov A_1 a A_2 ekvivalentné, aby pozícia hláv (fiktívnej v A_2 a skutočnej v A_1) bola rovnaká a aby boli automaty v ekvivalentných stavoch. A_2 používa na označenie fiktívnej hlavy dva symboly E a F. V každom ktorku, v ktorom sa mení pozícia fiktívnej hlavy sa mení jej symbol na E ak sa fiktívna hlava pohne doľava alebo na F ak sa fiktívna hlava pohne doprava. Takéto rozlišovanie slúži na určenie smeru prechodu skutočnej hlavy A_2 cez pracovné symboly obsahujúce iba symbol fiktívnej hlavy, pretože v tomto prípade na základe δ funkcie automatu A_1 nemožno rozhodnúť, ktorým smerom sa má hlava pohnúť (takáto situácia môže nastať aj je h vymazávací). V tejto fáze sa používajú pravidlá 6 až 14.

Dôkaz:

Dokážeme si napjprv niektoré pomocné tvrdenia:

1. Nech A_2 a A_1 sú v ekvivalentných stavoch, nech je pracovné slovo t v A_2 ekvivalentné pracovnému slovu w v A_1 a nech fiktívna hlava A_2 je na rovnakom písmene slova w ako hlava A_1.

2. Potom pre akýkoľvek krok výpočtu automatu A_1exituje také n, že po vykonani n krokov výpočtu automatu A_2 bude platiť 1.

3. Potom pre akúkoľvek n-člennú postupnosť krokov výpočtu automatu A_2, ktorá sa končí hneď ako fiktívna hlava je na nejakom písmene, existuje taký krok výpočtu automatu A_1, že po ich vykonaní bude platiť 1.

Dôkaz:

2. Ukážeme, že tvrdenie platí pre všetky možné kroky výpočtu A_1. Ak A_1zapíše symbol na pásku, A_2 vždy zapíše symbol na pásku tak, aby t bolo nadalej ekvivalentné s w (podľa definície ekvivalencie slov a pravidiel funckie δ_2), takže t a w zostávajú ekvivalentné. Ak A_1 zmeni stav na q_x, A_2 zmení stav na q_{1x} (podľa definície δ_2), takže A_1 a A_2 zostávajú v ekvivalentných stavoch. Ak A_1 posunie hlavu doprava (doľava), tak A_2posunie fiktívnu hlavu doprava (doľava) a ako symbol fiktívnej hlavy použije znak E (F) (podľa δ_2). V prípade, že sa takýmto posunom posunula skutočná hlava automatu A_2 na symbol obsahujúci iba znak F (E), A_2sa dostal do stavu, kedy fiktívna hlava nie je na žiadnom písmene. Preto sa musi ďalej posúvať až kým fiktívna hlava nebude na nejakom písmene. Ak je znak na páske F, tak je zrejmé, že automat už tadiaľto raz prešiel smerom doprava a teda, že teraz sa posúva smerom doľava, hlava sa teda musí posunúť smerom doľava. Ak je znak na páske E, tak je zrejmé, že automat už tadiaľto raz prešiel smerom doľava a teda, že teraz sa posúva smerom doprava, hlava sa teda musí posunúť smerom doprava. Automat pri takýchto posunoch zostáva v rovnakom stave. Vhľadom na to, že v prvej fáze výpočtu A_2 zapisuje všetky znaky pre fiktívnu hlavu ako E a na to, že automat začína výpočet na páske vľavo, bude A_2cez takéto symboly od začiatku prechádzať žiadaným smerom. Takéto posuny nemenia pozíciu fiktívnej hlavy v slove w (podľa definície pozície fiktívnej hlavy).Pozícia fiktívnej hlavy v slove w teda zostáva rovnaká ako pozícia hlavy A_1 v slove w.

3. Dokazujeme podobne ako 2.

Z tohoto pomocného tvrdenia a vyplýva tento dôsledok:

Nech A_2 je v konfigurácii $(q_{1x}, \cent t\$, 0)$, nech A_1 je v v konfigurácii $(q_x, \cent t\$, 0)$, a t je ekvivalentné w a nech fiktívna hlava A_2 je na rovnakom písmene slova w ako hlava A_1. Potom A_1akceptuje práve vtedy, keď A_2akceptuje.

Potrebujeme dokázať, že$h(L(A_2) \subseteq L(A_1)$, čiže $(\forall w \in L(A_2))(h(w) \in L(A_1))$.

Majme $w \in L(A_2) \Rightarrow$ pre w existuje akceptačný výpočet v A_2. Z definície A_2 (najmä z prvých 5 stavov funkcie δ_2) vidno, že A_2počas výpočtu dosiahne stav q_{10} a zároveň bude pre pracovné slovo u ekvivalentné k pracovnému slovu automatu A_2 platiť $u = h(w)$. Z dôsledku pomocného tvrdenia potom vyplýva, že A_1akceptuje slovo $h(w)$.

Potrebujeme dokázať, že $L(A_1) \subseteq h(L(A_2))$, čiže $(\forall w \in L(A_1))(\exists u \in L(A_2))(h(u) = w)$.

Majme $w \in L(A_1) \Rightarrow$ pre w existuje akceptačný výpočet v A_1. Z dôsledku pomocného tvrdenia potom vyplýva, že ak by A_2 mohol byť v konfigurácii $(q_{10}, ¢t\$, 0)$, kde t je ekvivalentné s w, tak by akceptoval. Z definície A_2 vidno, že v konfigurácii $(q_{10}, ¢t\$, 0)$ by platilo $w = h(u)$, kde u by bolo vstupné slovo pre automat A_2. Stačí teda nájsť také u, že platí $w = h(u)$, čiže $u \in h^{-1}(w)$.