PREZENTÁCIA Z FORMÁLNYCH JAZYKOV A AUTOMATOV

Zadanie (3.1):

Majme danú kontextovú gramatiku G.
Zostrojte lineárne ohraničený automat (LBA) A, taký že L(G) = L(A).
Pri simulácií použite spätné odvodenie (teda postupne na páske robíte spätné kroky až kým sa nedostanete ku σ).

Pri dôkaze použite matematickú indukciu.

Martin Pernecký, 2i3

14.3.2001, 12:20, B

Martin Pernecký, 2i3

Frázová gramatika:

Frázová gramatika je štvorica

$$G = (N, T, \sigma, P),$$

kde N je množina neterminálnych symbolov

T množina terminálnych symbolov ($N \cap T = \emptyset$)

σ počiatočný neterminál ($\sigma \in N$)

P konečná množina pravidiel

$P \subseteq (N \cup T)^* N (N \cup T)^* \rightarrow (N \cup T)^*$

Kontextová gramatika:

Kontextová gramatika je taká frázová gramatika, v ktorej pre každé pravidlo $u \rightarrow v$ platí, že $\mathbf{|u| \leq |v|}$

Martin Pernecký, 2i3

Lineárne ohraničený automat:

Lineárne ohraničený automat je šestica

$$A = (K; \Sigma; \Gamma; \delta; q_0; F)$$

kde K je konečná množina stavov

- Σ abeceda vstupných symbolov
- Γ abeceda pracovných symbolov ($\Sigma \subseteq \Gamma$)
- q_0 počiatočný stav; $q_0 \in K$
- F množina akceptačných stavov ($F \subseteq K$)
- δ funkcia; δ: $K \times (\Gamma \cup \{¢; \$\}) \rightarrow 2^{K \times (\Gamma \cup \{¢; \$\}) \times \{-1;0;1\}}$

– páska ohraničená dĺžkou vstupného slova

Martin Pernecký, 2i3

Príklad prepisu:

Majme jednoduchú konetxtovú gramatiku

$$G = (\{\sigma, A\}, \{a\}, \sigma, \{ \sigma \rightarrow A\sigma \mid A; A \rightarrow a\})$$

Odvodenie slova "aa" v G a

zjednodušené odvodenie v LBA A, ktorý akceptuje slová z L(G)

$$\sigma \Rightarrow A\sigma \Rightarrow AA \Rightarrow aA \Rightarrow aa$$

$$aa \vdash^{*} aA \vdash^{*} AA \vdash^{*} A\sigma \vdash^{*} \sigma$$

Martin Pernecký, 2i3

Etapy:

1. Nedeterministický výber pravidla, ktoré bolo použité ako posledné pri odvodení vetnej formy zapísanej na páske
2. Nedeterministický výber pozície, na ktorej začína pravá strana pravidla
3. Prepnutie do prepisovacieho stavu a prepisovanie pravej strany pravidla ľavou
4. Presun hlavy na počiatočnú pozíciu
5. Automat sa nedeterminisicky rozhodne či je na páske len σ
6. Ak áno, tak skontroluje či je to pravda
7. Ak nie, prejde do počiatočnej konfigurácie, a začína od prvej etapy

1. etapa: Výber pravidla

Automat sa nedeterministicky rozhodne pre nejaké pravidlo

$$\delta(q;\ \mathrm{w}) = \{\ (\boldsymbol{q_{[a;\ b]}};\ \mathrm{w};\ 0) \mid \mathrm{a} \to \mathrm{b} \in\ \mathrm{P}\ \}$$

– stav $\boldsymbol{q_{[a;\ b]}}$ = naposledy bolo použité pravidlo a → b, pri odvodení vetnej formy na páske

Príklad:

Ak máme časť odvodenia v G:

$$\ldots\ \mathrm{Aa} \Rightarrow_{(\mathrm{A} \to \mathrm{a})} \mathrm{aa}\ldots,$$

tak A sa automat rozhodne nasledovne

$$q,\ ¢|\mathrm{aa\$} \vdash q_{[\mathrm{A};\ \mathrm{a}]},\ ¢|\mathrm{aa\$}\ \ldots$$

2. etapa: Výber pozície

Automat sa nedeterministicky rozhodne pre počiatočnú pozíciu pravej strany pravidla

$$\delta(q_{[a;\, b]};\, w) = \{\ (q_{[a;\, b]};\, w;\, 1)\ \}$$

3. etapa: Prepisovanie pravidiel

Automat sa prepne do prepisovacieho módu

$$\delta(q_{[a_1a_2\ldots a_n;\, b_1b_2\ldots b_m]};\, w) = \{\ (\, q'_{[a_1a_2\ldots a_n;\, b_1b_2\ldots b_m]};\, w;\, 0)\ \}$$

a následne začne prepisovať pravú stranu pravidla ľavou

$$\delta(q'_{[a_1a_2\ldots a_n;\, b_1b_2\ldots b_m]};\, b_1) = \{\ (q'_{[a_2\ldots a_n;\, b_2\ldots b_m]};\, a_1;\, 1)\ \}.$$

.

.

$$\delta(q'_{[a_n;\, b_n\ldots b_m]};\, b_n) = \{\ (q'_{[\varepsilon;\, b_{n+1}\ldots b_m]};\, a_n;\, 1)\ \}$$

$$\delta(q'_{[\varepsilon;\, b_{n+1}\ldots b_m]};\, b_{n+1}) = \{\ (q'_{[\varepsilon;\, b_{n+2}\ldots b_m]};\, \varepsilon;\, 1)\ \}$$

.

.

$$\delta(q'_{[\varepsilon;\, b_m]};\, b_m) = \{\ (q'_{[\varepsilon;\, \varepsilon]};\, \varepsilon;\, 1)\ \}$$

Problém pravidiel s rôzne dlhou pravou a l'avou stranou

Nech $a \rightarrow b \in P$

1. |a| =|b|

Nenastáva problém pri prepise

2. |a| < |b|

Ak máme napr. odvodenie:

$$C \Rightarrow_G AAB,$$

tak v A vyzerá odvodenie nasledovne:

$$\ldots q'_{[C;AAB]}; ¢|AAB\$ \vdash q'_{[\varepsilon;AB]}; ¢C|AB\$ \vdash q'_{[\varepsilon;B]}; ¢C\varepsilon|B\$ \vdash \ldots$$

– vyplnenie zvyšných znakov ε

– treba vyriešiť aby automat akceptoval AεBεC ako ABC

– rozšírením δ-funkcie o časti, ktoré ignorujú ε

$$\boldsymbol{\delta(q'_{[a;\,b]};\ \varepsilon) = \{\ (q'_{[a;\,b]};\ \varepsilon;\ 1)\ \}}$$

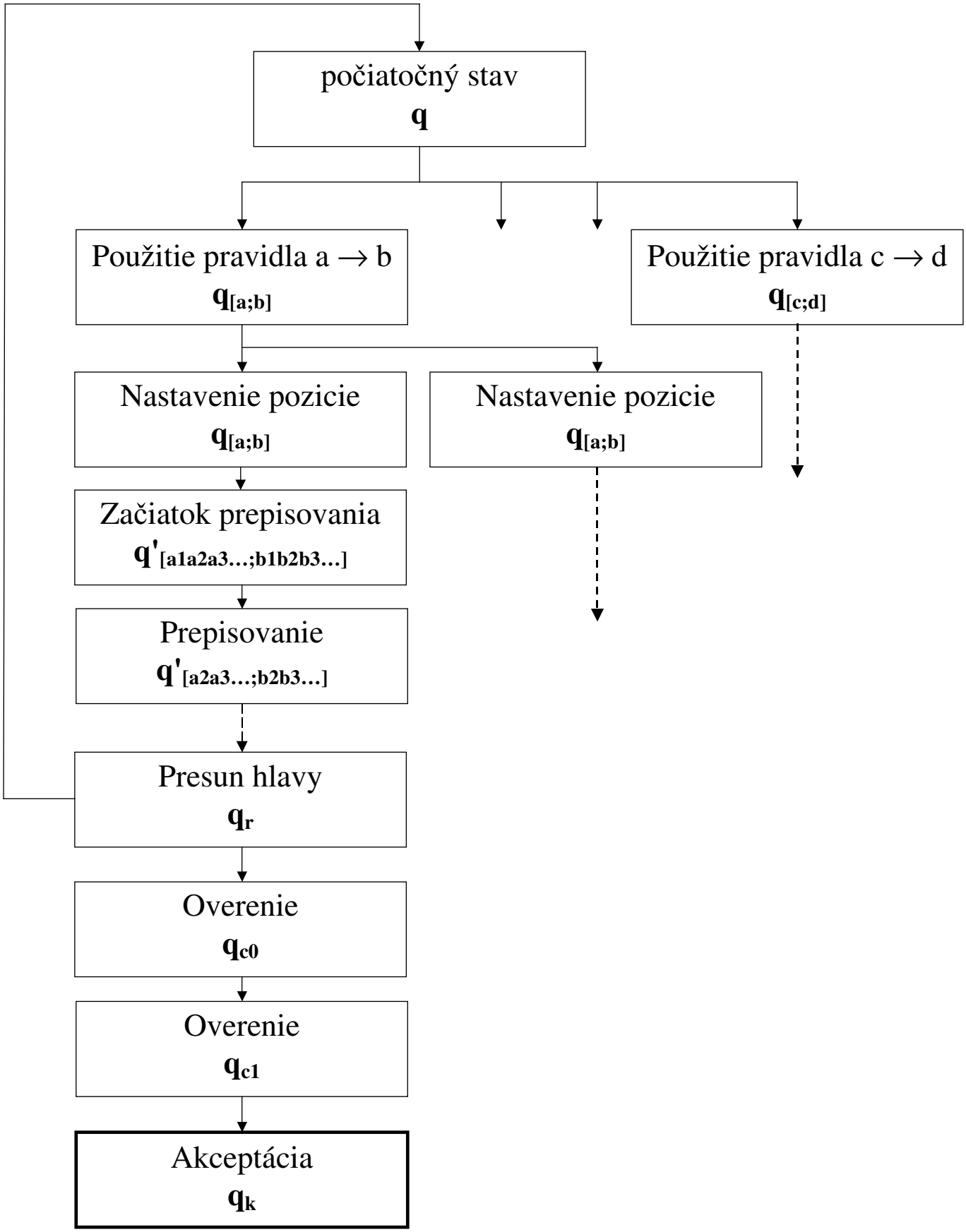
– upratanie pásky – posunutie zvyšku pásky a zapísanie falošného $

3. |a| >|b|

Nenachádzajú sa v kontextovej gramatike

Martin Pernecký, 2i3

Konštrukcia automatu:



Riešenie (formálne):

Ku kontextovej gramatike G = (N; T; σ; P)

vytvoríme automat A = (K; T; N ∪ T ∪ {ε}; δ; q; {q_k})

$Q = \bigcup_{a_1a_2...a_n \to b_1b_2...b_m \in P} q_{[a_1a_2...a_n;b_1b_2...b_m]}, q'_{[a_1a_2...a_n;b_1b_2...b_m]}; q'_{[a_2...a_n;b_2...b_m]}; \dots q'_{[\varepsilon;\varepsilon]}$

K = {q; q_k; q_r; q_{c0}; q_{c1}} ∪ Q

Definícia delta funkcie

1. Nedeterministicky sa rozhodne pre nejaké pravidlo

$$\delta(q; w) = \{ (q_{[a;\,b]}; w; 0) \mid a \to b \in P \}\ (\forall w \in \Gamma)$$

2. Rozhodne sa pre nejakú pozíciu na páske

$$\delta(q_{[a;\,b]}; w) = \{ (q_{[a;\,b]}; w; 1) \}\ (\forall w \in \Gamma)\ (\forall q_{[a;\,b]} \in Q)$$

3. Prepisovanie pravidla;

$$\delta(q_{[a_1a_2\dots a_n;\ b_1b_2\dots b_m]}; w) = \{ (q'_{[a_1a_2\dots a_n;\ b_1b_2\dots b_m]}; w; 0) \}\ (\forall w \in \Gamma)$$
$$(\forall q_{[a_1a_2\dots a_n;\ b_1b_2\dots b_m]} \in Q)$$
$$\delta(q'_{[a_1a_2\dots a_n;\ b_1b_2\dots b_m]}; b_1) = \{ (q'_{[a_2\dots a_n;\ b_2\dots b_m]}; a_1; 1) \}\ (\forall q'_{[a_1a_2\dots a_n;\ b_1b_2\dots b_m]} \in Q)$$

.

$$\delta(q'_{[a_n;\ b_n\dots b_m]}; b_n) = \{ (q'_{[\varepsilon;\ b_{n+1}\dots b_m]}; a_n; 1) \}\ (\forall q'_{[a_1a_2\dots a_n;\ b_1b_2\dots b_m]} \in Q)$$
$$\delta(q'_{[\varepsilon;\ b_{n+1}\dots b_m]}; b_{n+1}) = \{ (q'_{[\varepsilon;\ b_{n+2}\dots b_m]}; \varepsilon; 1) \}\ (\forall q'_{[a_1a_2\dots a_n;\ b_1b_2\dots b_m]} \in Q)$$

.

$$\delta(q'_{[\varepsilon;\ b_m]}; b_m) = \{ (q'_{[\varepsilon;\ \varepsilon]}; \varepsilon; 1) \}\ (\forall q'_{[a_1a_2\dots a_n;\ b_1b_2\dots b_m]} \in Q)$$

4. Presun na začiatok pásky

$$\delta(q'_{[\varepsilon;\ \varepsilon]}; w) = \{ (qr; w; -1) \}\ (\forall w \in \Gamma - \{¢\}))$$
$$\delta(q_r; w) = \{ (q_r; w; -1) \}\ (\forall w \in \Gamma - \{¢\}))$$

5. Kontrola, či na páske neostalo len σ

$$\delta(q_r; ¢) = \{ (q_{c0}; ¢; 0) \}$$
$$\delta(q_{c0}; \sigma) = \{ (q_{c1}; \sigma; 1) \}$$
$$\delta(q_{c0}; \varepsilon) = \{ (q_{c0}; \varepsilon; 1) \}$$
$$\delta(q_{c1}; \varepsilon) = \{ (q_{c1}; \varepsilon; 1) \}$$
$$\delta(q_{c1}; \$) = \{ (q_k; \$; 0) \}$$

6. Návrat do počiatočného stavu

$$\delta(q_r; ¢) = \{ (q; ¢; 1) \}$$

$$\delta(q'_{[a;\,b]}; \varepsilon) = \{ (q'_{[a;\,b]}; \varepsilon; 1) \}\ (\forall q'_{[a;\,b]} \in Q)$$

Dôkaz:

Prebieha matematickou indukciou v dvoch smeroch

1. $L(G) \subseteq L(A)$

   Matematická indukcia na počet krokov odvodenia $w \in L(G)$

2. $L(G) \supseteq L(A)$

   Matematická indukcia na počet konfigurácií typu $¢qw\$$ $(w \in \Gamma^*)$