Prezentačná úloha z FoJA

Martin Širáň

Zadanie

Dokážte, že pre deterministický zásobníkový automat A a regulárny jazyk R je rozhodnuteľné:

- $L(A) = R$
- $L(A) \subseteq R$
- $R \subseteq L(A)$

Riešenie

Lema 1. *Doplnok regulárneho jazyka je regulárny jazyk.*
Dôkaz.

- DKA $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- DKA M', $L(M') = L(M)^c$:
  $M' = (K, \Sigma, \delta, q_0, K \setminus F)$.
- Ak $w \in L(M)$, potom M akceptuje w v nejakom stave $q \in F$, $q \in F \Rightarrow q \notin K \setminus F$, teda $w \notin L(M')$.
- Ak $w \notin L(M)$, potom sa M zasekne na w v nejakom stave $q \notin F$, $q \notin F \Rightarrow q \in K \setminus F$, teda $w \in L(M')$. □

Lema 2. *K ľubovoľnému deterministickému zásobníkovému automatu M existuje deterministický zásobníkový automat $M^{'}$ taký, že:*

- $L(M^{'}) = L(M)$
- *$M^{'}$ pri každom výpočte prečíta celý svoj vstup a potom sa zastaví.*

Dôkaz. Pozri literatúru...

Lema 3. *Doplnok deterministického bezkontextového jazyka je deterministický bezkontextový jazyk.*

Dôkaz.

- Pôvodný DPD (spĺňajúci bunv. lemu 2): $M = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$
- DPD $M^{'}$, $L(M^{'}) = L(M)^c$: $M^{'} = (K^{'}, \Sigma, \Gamma, \delta^{'}, q_0^{'}, Z_0, F^{'})$, kde $K^{'} = K \times \{1, 2, 3\}$, $F^{'} = K \times \{3\}$. Ak $q_0 \in F$, tak $q_0^{'} = (q_0, 1)$, inak $q_0^{'} = (q_0, 2)$.
- V stave (q, k) je $k = 1$ ak M od posledne vykonaného kroku na vstupnom symbole

(nie "ε-e") dosiahol akceptačný stav, inak $k = 2$. Ak $k = 3$, $M^{'}$ je schopný akceptácie.

- Pre $\delta(q, \varepsilon, Z) = (p, \gamma)$ a $(k = 1 \ \vee \ k = 2)$ je $\delta^{'}((q, k), \varepsilon, Z) = ((p, k^{'}), \gamma)$, kde $k^{'} = 1$ ak $(k = 1 \ \vee \ p \in F)$, inak $k^{'} = 2$.
- Pre $\delta(q, a, Z) = (p, \gamma)$ je $\delta^{'}((q, 1), a, Z) = \delta^{'}((q, 3), a, Z) = \delta^{'}((p, k), \gamma)$, kde $k = 1$ ak $p \in F$, inak $k = 2$.
- Pre $\delta(q, \varepsilon, Z) = \emptyset$ je $\delta^{'}((q, 2), \varepsilon, Z) = ((q, 3), Z)$.
- Ak $w \in L(M)$, potom na w sa M dostane do nejakého stavu $q_F \in F$, čiže $M^{'}$ sa dostane do stavu $(q_F, 1)$. Z definície $\delta^{'}$ vidno, že $M^{'}$ už nemôže akceptovať, teda $w \notin L(M^{'})$.
- Ak $w \notin L(M)$, potom po spracovaní posledného symbolu w, M prechádza už len cez neakceptačné stavy na ε, až sa v nejakom $q_R \in K \setminus F$ zasekne. Teda $M^{'}$ sa dostane do stavu $(q_R, 2)$, odkiaľ smie prejsť do stavu $(q_R, 3) \in F^{'}$, teda $w \in L(M^{'})$. $\square$

Lema 4. *Prienik deterministického bezkontextového jazyka s regulárnym jazykom je deterministický bezkontextový jazyk.*

Dôkaz.

- DPD $M_1 = (K_1, \Sigma_1, \Gamma, \delta_1, q_{1_0}, Z_0, F_1)$
- DKA $M_2 = (K_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{2_0}, F_2)$.
- DPD M_3, $L(M_3) = L(M_1) \cap L(M_2)$: $M_3 = (K_1 \times K_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \Gamma, \delta_3, (q_{1_0}, q_{2_0}), Z_0, F_1 \times F_2)$.
- Pre $\delta_1(q_1, a, Z) = (p_1, \gamma)$ a $\delta_2(q_2, a) = p_2$ je $\delta_3((q_1, q_2), a, Z) = ((p_1, p_2), \gamma)$.
- Pre $\delta_1(q_1, \varepsilon, Z) = (p_1, \gamma)$ je $\delta_3((q_1, q_2), \varepsilon, Z) = ((p_1, q_2), \gamma)$.
- $w \in L(M_1) \cap L(M_2) \Rightarrow (q_{1_0}, w, Z_0) \vdash^*_{M_1} (q_{1_F}, \varepsilon, \gamma)$ $(q_{1_F} \in F_1)$ a $(q_{2_0}, w) \vdash^*_{M_2} (q_{2_F}, \varepsilon)$ $(q_{2_F} \in F_2)$. Potom M_3 príde do stavu $(q_{1_F}, q_{2_F}) \in F_1 \times F_2$, teda $w \in L(M_3)$.
- $w \notin L(M_1) \vee w \notin L(M_2) \Rightarrow M_1$ alebo M_2 sa na w zasekne v neakceptačnom stave, potom rovnako skončí aj M_3, teda $w \notin L(M_3)$. $\square$

Lema 5. *Problém prázdnosti bezkontextového jazyka je rozhodnuteľný.*

Dôkaz.

- Pre CFG $G = (N, T, P, \sigma)$ chceme nájsť algoritmus rozhodujúci problém $L(G) = \emptyset$.
- Princíp spočíva v induktívnom generovaní množín terminujúcich neterminálov H_i:
  - $H_0 = \{\xi \in N;\ (\exists w \in T^*)(\xi \to w \in P)\}$
  - $H_{i+1} = H_i \cup \{\xi \in N;\ (\exists w \in (T \cup H_i)^*)$ $(\xi \to w \in P)\}$
- Z konečnosti množiny N vyplýva aj konečnosť tohto procesu, teda $H_n = H_{n+k}$, pre nejaké n a ľubovoľné k (prirodzené).
- Dôkaz, že pre každý neterminál z H_n sa v G dá odvodiť nejaké slovo je triviálna matematická indukcia vzhľadom na počet krokov výpočtu H_n (IP: neterminály v H_i sa dajú v G prepísať na slovo).
- Ak $\sigma \notin H_n$, potom $L(G) = \emptyset$, inak $L(G) \neq \emptyset$, teda problém je rozhodnuteľný. $\square$

Veta 1. *Pre deterministický zásobníkový automat A a regulárny jazyk R je rozhodnuteľné, či $L(A) \subseteq R$.*

Dôkaz.

- Podľa lemy 1 a 4 vieme, že $L(A) \cap R^c \in \mathcal{L}_{\mathcal{DCF}}$.
- $\mathcal{L}_{\mathcal{DCF}} \subset \mathcal{L}_{\mathcal{CF}}$, podľa lemy 5 je $L(A) \cap R^c = \emptyset$ rozhodnuteľné a $L(A) \subseteq R \Leftrightarrow L(A) \cap R^c = \emptyset$.
- Teda problém $L(A) \subseteq R$ je rozhodnuteľný. $\square$

Veta 2. *Pre deterministický zásobníkový automat A a regulárny jazyk R je rozhodnuteľné, či $R \subseteq L(A)$.*

Dôkaz.

- Podľa lemy 3 a 4 vieme, že $R \cap L(A)^c \in \mathcal{L}_{\mathcal{DCF}}$.
- $\mathcal{L}_{\mathcal{DCF}} \subset \mathcal{L}_{\mathcal{CF}}$, podľa lemy 5 je $R \cap L(A)^c = \emptyset$ rozhodnuteľné a $R \subseteq L(A) \Leftrightarrow R \cap L(A)^c = \emptyset$.
- Teda problém $R \subseteq L(A)$ je rozhodnuteľný. $\square$

Veta 3. *Pre deterministický zásobníkový automat A a regulárny jazyk R je rozhodnuteľné, či $L(A) = R$.*

Dôkaz.

- Podľa viet 1 a 2 vieme, že problémy $L(A) \subseteq R$ a $R \subseteq L(A)$ sú rozhodnuteľné.
- Avšak $L(A) = R \Leftrightarrow L(A) \subseteq R \wedge R \subseteq L(A)$. Teda problém $L(A) = R$ je rozhodnuteľný. $\square$