Rozhodnuteľnosť niektorých problémov pre rekurzívne vyčísliteľné jazyky

Matej Lučenič
18. 4. 2001

Zadanie:
Dokážte, či sú nasledujúce vlastnosti rekurzívne vyčísliteľných jazykov rozhdnuteľné:

a) konečnosť
b) regulárnosť
c) bezkontextovosť

Rozhodnite, či sú nasledujúce problémy čiastočne rozhodnuteľné:

a) rovnosť prázdnemu jazyku
b) rovnosť $\sum^*$
c) rekurzívnosť
d) nerovnosť prázdnemu jazyku

Definujme si na začiatok nikoľko pojmov, ktoré budeme ďalej využivať.

Definícia: Vlastnosť S jazykov L_{RE} sa nazýva netriviálna, ak existujú jazyky L_1, $L_2 \in L_{RE}$ také, že $L_1 \in S$ a $L_2 \notin S$. Vlastnosť S sa nazýva triviálna, ak $S=L_{RE}$ alebo $S = Ø$.

Veta 1. (Rice)
Každá netriviálna vlastnosť rekurzívne vyčísliteľných jazykov je nerozhodnuteľná.

Dôkaz je uvedený v poznámkach z prednášok z formálnych jazykov dostupných na internete na strane 74. Len naznačím myšlienku. Dôkaz sa robí redukciou na L_u. L_u je tzv. univerzálny jazyk: $L_u = \{v\#w \mid w \in L(A_v)\}$ Tento jazyk nie je rekurzívny. V prípade, že by existovala netriviálna rozhodnuteľná vlastnosť S pre rekurzívne vyčísliteľné jazyky, dokážeme potom zostrojiť deterministicky TS, ktorý zastaví na každom vstupe a akceptuje L_u, čo je v spore s tvrdením, že L_u nie je rekurzívny.

Definícia: Nech S je vlastnosť jazyka v L_{RE}, potom definujme jazyk

$$L_S := \{ \langle A \rangle \mid L(A) \text{ má vlastnosť } S\}$$

Poznámka: Ak je vlastnosť rozhodnuteľná, tak musí existovať DTS A, ktorý zastaví na každom vstupe a teda $L_S \in L_{rec}$.

Veta 2. (Rice)
$L_S \in L_{RE}$ práve vtedy, keď sú splnené nasledujúce tri vlastnosti:

1. Ak $L \in S$ a $L \subseteq L'$, $L' \in L_{RE}$ potom $L' \in S$.
2. Ak $L \in S$ je nekonečný jazyk, potom existuje $L' \subseteq L$, L' je konečný a $L' \in S$.
3. Množina všetkých konečných jazykov v S je rekurzívne vyčísliteľná.

Dôkaz vety je v poznámkach z prednášok na strane 74, 75. Pri dôkaze sa opäť využíva jazyk L_u, pre ktorý platí, že $L_u^c \notin L_{RE}$.

Riešenie úlohy:

Prvá časť:

Keďže všetky tri vlastnosti rekurzívne vyčísliteľných jazykov z prvej časti úlohy sú netriviálne, tak podľa Vety 1. sú nerozhodnuteľné.

Druhá časť:

Čiastočná rozhodnuteľnosť vlastnosti S pre rekurzívne vyčísliteľné jazyky je ekvivalentná príslušnosti jazyka L_S do triedy L_{RE}.

a) rovnosť prázdnemu jazyku

   Tento problém nie je čiastočn rozhodnuteľný. Keby bol, dostali by sme sa do sporu s Vetou 2. časťou 1). Totiž každý rekurzívne vyčísliteľný jazyk je nadmnožina prázdeho jazyka, ale to ešte neznamená, že aj on musí byť prázdny.

b) rovnosť Σ^*

   Keby bola táto vlastnosť rozhodnuteľná, dostali by sme sa do sporu s časťou 2) Vety 2. Konečný jazyk nemôže buť rovný Σ^*.

c) rekurzívnosť

opäť spor s časťou 1) Vety 2. Rekurzívne vyčísliteľná nadmnožina rekurzívneho jazyka nemusí byť rekurzívna. L= {} je rekurzívny jazyk, ale L_u, ktorý je jeho nadmnožinou už nie je rekurzívny.

d) nerovnosť práznemu jazyku

Vlastnosti 1) a 2) z vety 2. platia triviálne. Ešte ostáva vlastnosť 3). Vyrobíme turingov stroj, ktorý na vstupe dostane jazyk neprázdny jazyk L $\in$ L_{RE}, potom vygeneruje nedeterministicky kód TS <A>, tak aby L = L(A) a odsimuluje na ňom výpočet nad všetkými slovami z jazyka L. Ak je L konečný, zastaví a akceptuje, ak nie, zacyklí sa.