Prezentácia úlohy 5 z piatej sady úloh

Meno: Michal Fratrič
Skupina: foja5, 2i1
Cvičiaci: M. Slašťan

Zadanie:

Zostrojte det. turingov stroj(TM), ktorý ak dostane na vstup k čisel, k>=2 (napríklad v tvare $1^{i1}01^{i2}0...1^{ik}0$), potom tieto čísla utriedi.
Detailne zdôvodnite správnost svojej konštrukcie.

Riešenie:

Keďže triedenie čísel s dĺžkou 0 nemá veľký význam, zaveďme si $i_j > 0$ pre $1<=j<=k$.
Najprv si zadefinujme Turingov stroj $A=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,F)$, kde
$K=\{q_0\text{-}q_4,q_7,q_{10}\text{-}q_{17},q_{20}\text{-}q_{21},q_{30}\text{-}q_{32},q_A,q_{AKC}\}$ je množina stavov
$\Sigma=\{0,1\}\cup\{B\}$ je vstupná abeceda
$\Gamma=\{0,1,1',S,B,B_Z,B_K\}$ je pracovná abeceda páskových symbolov
δ je delta funkcia
q_0 je počiatočný stav
$F=\{q_{AKC}\}$ je množina akceptačných stavov.

δ je definovaná nasledovne:

$\delta(q_0,1)=(q_1,1',1)$ //porovnáva 2 čísla za sebou po znaku
$\delta(q_1,1)=(q_1,1,1)$
$\delta(q_1,0)=(q_2,0,1)$
$\delta(q_2,1')=(q_2,1',1)$
$\delta(q_2,S)=(q_7,S,-1)$
$\delta(q_2,1)=(q_3,1',-1)$
$\delta(q_3,1')=(q_3,1',-1)$
$\delta(q_3,0)=(q_4,0,-1)$
$\delta(q_4,1)=(q_4,1,-1)$
$\delta(q_4,1')=(q_0,1',1)$

$\delta(q_7,x)=(q_7,x,-1)\ \forall x \in \Gamma - \{B_Z,1'\}$ //"uprace" posledné neutriedené číslo
$\delta(q_7,\ 1'\ )=(q_7,\ 1\ ,-1)$
$\delta(q_7,B_Z)=(q_A,B_Z,1)$

č1>č2

$\delta(q_2,0)=(q_{10}\ ,0,-1)$ //druhé číslo je kratšie

$\delta(q_{10},1')=(q_{10},1,-1)$ //vymení ich
$\delta(q_{10},0)=(q_{11},0,-1)$
$\delta(q_{11},1)=(q_{11},1,-1)$
$\delta(q_{11},\ 1'\ )=(q_{12},\ 0\ ,1)$
$\delta(q_{12},1)=(q_{12},1,1)$
$\delta(q_{12},\ 0\ )=(q_{13},\ 1\ ,1)$

$\delta(q_{13},1)=(q_{13},1,1)$ //otestuje koniec
$\delta(q_{13},0)=(q_{14},0,1)$
$\delta(q_{14},1)=(q_{16},1,-1)$ //nie je koniec
$\delta(q_{14},B)=(q_{15},B_K,-1)$, //je koniec
$\delta(q_{14},S)=(q_{15},S,-1)$, //je koniec

$\delta(q_{15},0)=(q_{30},0,-1)$

$\delta(q_{16},0)=(q_{17},0,-1)$ //nekončí,môže čítať ďalej
$\delta(q_{17},1)=(q_{17},1,-1)$
$\delta(q_{17},0)=(q_0,0,1)$

$\delta(q_{30},1)=(q_{30},1,-1)$ //končí,označí najv.číslo,ide na začiatok
$\delta(q_{30},0)=(q_{31},0,1)$
$\delta(q_{31}, 1)=(q_{32} , S ,-1)$
$\delta(q_{32},x)=(q_{32},x,-1)$ $\forall x \in \{0,1\}$
$\delta(q_{32}, 1')=(q_{32}, 1 ,-1)$
$\delta(q_{32},B)=(q_0,B_Z,1)$

$\delta(q_A,x)=(q_A,x,1)$ $\forall x \in \Gamma - \{S,B_K\}$ //po utriedení "uprace" pásku a akceptuje
$\delta(q_A, S)=(q_A, 1 ,1)$
$\delta(q_A, B_K)=(q_{AKC}, B_K,0)$

č1<=č2:
$\delta(q_0,0)=(q_{20},0,1)$ //pripraví sa na porovnávanie w2, w3
$\delta(q_{20},1')=(q_{20},1,1)$
$\delta(q_{20},x)=(q_{21},x,-1)$ $\forall x \in \{1,0\}$ //1 ak menšie, 0 ak rovné
$\delta(q_{21},1)=(q_{21},1,-1)$
$\delta(q_{21},0)=(q_0,0,1)$

Teraz popis δ-funkcie.
Najprv zistíme dĺžky prvých 2 čísel (stavy q_0-q_4).
Ak je 1. väčšie ako druhé, vymení ich(q_{10}-q_{13}, inak ich nechá tak:q_{20}-q_{21}) a nastaví čítaciu hlavu na začiatok 2.slova.
Takto postupuje ďalej, teda testuje veľkosti čísel $č_2$? $č_3$, $č_3$? $č_4$, ...
$č_{k-1}$? $č_k$. Keďže v každom kroku sa väčšie číslo dostáva doprava, po k-1 testoch sa najväčšie z nich dostane na poslednú k-tu pozíciu. Keď zistí, že už je na konci (q_{14}), vráti sa na začiatok posledného (teda aj najväčšieho čísla,q_{15},q_{30}) a jeho 1.jednotku prepíše na S (q_{31}), ktorý nám bude neskôr slúžiť ako B (dočasný koniec pásky).
Našli sme najväčšie číslo, teraz možeme ísť na začiatok pásky (q_{32}, nezabudnúť na odznačenie 1' na 1 v 1.slove) a podobne ako doteraz hľadáme 2.najväčie slovo. To umiestime na pozíciu k-1 -ého čísla, teda pred S.
Postupne takýmto prechádzaním hľadáme ďalšie ešte neutriedené maximálne prvky z ešte neutriedených prvkov.
Ak nám zvýši posledný (najmenší) prvok(q_7), necháme ho na mieste a prejdeme celú pásku až do konca (q_A) a nahrádzame znaky S na 1. Po príchode na koniec pásky prejdeme do akceptačného stavu.

Dôkaz:

Najprv si dokážeme pomocnú lemu:

<u>Lema:</u> Majme na páske n čísel, potom vieme vybrať z nich najväčšie a položiť ho na poslednú pozíciu zo všetkých čísel.

<u>Dôkaz lemy:</u>

Najprv ukážeme, že ak TM A dostane na vstupe 2 čísla, utriedi ich tak, že to väčšie sa presunie doprava (pri ich rovnosti alebo č1<č2 ich nechá tak).

Výpočet δ-funkcie vyzerá takto:

$(q_0, B \Rightarrow 1^{i1} 0\ 1^{i2} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash (q_1, B\ 1' \Rightarrow 1^{i1-1} 0\ 1^{i2} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash^{i1-1}$

$(q_1, B\ 1'\ 1^{i1-1} \Rightarrow 0\ 1^{i2} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash (q_2, B\ 1'\ 1^{i1-1} 0 \Rightarrow 1^{i2} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash$

$(q_3, B\ 1'\ 1^{i1-1} \Rightarrow 0\ 1'\ 1^{i2-1} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash^{i1-1} (q_4, B \Rightarrow 1'\ 1^{i1-1} 0\ 1'\ 1^{i2-1} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash$

$(q_0, B\ 1' \Rightarrow 1^{i1-1} 0\ 1'\ 1^{i2-1} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash \ldots$

Označili sme si 1. jednotky z oboch čísel. Teraz si označíme zvyšných m-1 cifier v oboch číslach, kde m=min (i_1,i_2). Vzniknú nám 3 možnosti:

1, $i_1 > i_2$ (1.číslo je väčšie)

$\ldots \vdash (q_0, B\ 1'^{m} \Rightarrow 1^{i1-m} 0\ 1'^{m} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash$

$(q_1, B\ 1'^{m+1} \Rightarrow 1^{i1-m-1} 0\ 1'^{m} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash^{i1-m-1}$

$(q_1, B\ 1'^{m+1}\ 1^{i1-m-1} \Rightarrow 0\ 1'^{m} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash$

$(q_2, B\ 1'^{m+1}\ 1^{i1-m-1}\ 0 \Rightarrow 1'^{m} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash^{m}$

$(q_2, B\ 1'^{m+1}\ 1^{i1-m-1}\ 0\ 1'^{m} \Rightarrow 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash$

$(q_{10}, B\ 1'^{m+1}\ 1^{i1-m-1}\ 0\ 1'^{m-1} \Rightarrow 1'\ 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash^{m-1}$

$(q_{10}, B\ 1'^{m+1}\ 1^{i1-m-1}\ 0 \Rightarrow 1'1^{m-1} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash$

$(q_{10}, B\ 1'^{m+1}\ 1^{i1-m-1} \Rightarrow 0\ 1^{m} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash^{i1-m}$

$(q_{11}, B\ 1'^{m} \Rightarrow \underline{1'\ 1^{i1-m-1}\ 0\ 1^{m}} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash$

$(q_{12}, B\ 1'^{m}\ \underline{0} \Rightarrow 1\underline{^{i1-m-1}\ 0\ 1^{m}} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash^{i1-m-1}$

$(q_{12}, B\ 1'^{m}\ \underline{0\ 1^{i1-m-1}} \Rightarrow \underline{0\ 1^{m}} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash$

$(q_{13}, B\ 1'^{m}\ \underline{0\ 1^{i1-m-1}\ \ 1} \Rightarrow \underline{1^{m}} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash \ldots$

čísla sme práve vymenili, ešte sa cez stavy q_{13},q_{14},q_{16},q_{17} dostane do konfigurácie

$\ldots \vdash (q_0, B\ 1'^{m}\ 0 \Rightarrow 1^{i1}\ 0\ neB \ldots 1^{ik} 0\ B)$, kde neB <> B (každý neblankový znak)

alebo

$\ldots \vdash (q_0, B\ 1'^{m}\ 0 \Rightarrow 1^{i1}\ 0\ B)$, k tomuto prípadu sa ešte neskôr vrátime

(nastáva, keď číta posledné číslo a vtedy sa nenastavuje hlava na posledne čítané slovo, ale ide na začiatok)

2, $i_1 = i_2$

$\ldots \vdash (q_0, B\ 1'^{m} \Rightarrow 0\ 1'^{m} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash$

$(q_{20}, B\ 1'^{m}\ 0 \Rightarrow 1'^{m} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash^{m}$

$(q_{20}, B\ 1'^{m}\ 0\ 1^{m} \Rightarrow 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash$

$(q_{21}, B\ 1'^{m}\ 0\ 1^{m-1} \Rightarrow 1\ 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash^{m}$

$(q_{21}, B\ 1'^{m} \Rightarrow 0\ 1^{m} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash$

$(q_0, B\ 1'^{m}\ 0 \Rightarrow 1^{m} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B)$

3, $i_1 < i_2$

$\ldots \vdash (q_0, B\ 1'^{m} \Rightarrow 0\ 1'^{m}\ 1^{i2-m} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash$

$(q_{20}, B\ 1'^{m}\ 0 \Rightarrow 1'^{m}\ 1^{i2-m} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash^{m}$

$(q_{20}, B\ 1'^{m}\ 0\ 1^{m} \Rightarrow 1^{i2-m} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash$

$(q_{21}, B\ 1'^{m}\ 0\ 1^{m-1} \Rightarrow 1\ 1^{i2-m} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash^{m}$

$(q_{21}, B\ 1'^{m} \Rightarrow 0\ 1^{m}\ 1^{i2-m} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B) \vdash$

$(q_0, B\ 1'^{m}\ 0 \Rightarrow 1^{m}\ 1^{i2-m} 0 \ldots 1^{ik} 0\ B)$

Neformálny dôkaz:

Ukázali sme, že vieme prehodiť 2 nasledujúce čísla, ak to 2-hé je menšie
a že sa čítacia hlava vždy posunie o 1 číslo ďalej, ako začínala, teda
číslo=max(i_1, i_2, ..., i_N) sa dostane na poslednú pozíciu.
Môžme to ukázať i MI vzhľadom na u, práve porovnávané číslo:
1˚ u=1, nech sú čísla: c_1, c_2, ... ,c_N
Potom pri porovnaní c_1 ? c_2 sa vytvorí nasledovné poradie c_1 a c_2:
min(c_1, c_2) max(c_1, c_2)
2˚ nech 1<u<n-1, predpokladajme, že z porovnania c_u ? c_{u+1} vytvorí nasledovné poradie:

a:= min(c_u, c_{u+1}) max(c_u, c_{u+1}) =:**b**.

Ukážeme, že v ďalšom kroku z porovnania **b** ? c_{u+2} zase vytvorí poradie

min(**b**, c_{u+2}) max(**b**, c_{u+2}).

Lenže to sme už ukázali, keď sme rozoberali všetky 3 možnosti (ne)rovností 2 čísel po sebe. A keďže už **b** bolo maximom z predošlých u+1, potom max(**b**, c_{u+2}) bude maximom vrátane tejto u+2 -hej pozície.
Teda úplné maximum sa dostane až úplne doprava.

Treba ešte otestovať prípad, keď v stave q_{14} číta B. To znamená, že už je na konci a označí si posledné slovo za "uložené" a triedi ostatné. Vtedy vyzerá výpočet takto (pre jednoduchosť keď k=2):

$(q_{14}, B\ 1'^{m}\ 0\ 1^{i1}\ 0\ \uparrow B) \vdash$
$(q_{15}, B\ 1'^{m}\ 0\ 1^{i1}\ \uparrow 0\ B_K) \vdash$
$(q_{30}, B\ 1'^{m}\ 0\ 1^{i1-1}\ \uparrow 1\ 0\ B_K) \vdash^{i1}$
$(q_{30}, B\ 1'^{m}\ \uparrow 0\ 1^{i1}\ 0\ B_K) \vdash$
$(q_{31}, B\ 1'^{m}\ 0\ \uparrow 1\ 1^{i1-1}\ 0\ B_K) \vdash$
$(q_{32}, B\ 1'^{m}\ \uparrow 0\ \underline{S}\ 1^{i1-1}\ 0\ B_K) \vdash$
$(q_{32}, B\ 1'^{m-1}\ \uparrow 1'\ 0\ S\ 1^{i1-1}\ 0\ B_K) \vdash^{m}$
$(q_{32}, \uparrow B\ 1^{m}\ 0\ S\ 1^{i1-1}\ 0\ B_K) \vdash$
$(q_0, B_Z\ \uparrow 1\ 1^{m-1}\ 0\ S\ 1^{i1-1}\ 0\ B_K) \vdash$
$(q_1, B_Z\ 1'\ \uparrow 1^{m-1}\ 0\ S\ 1^{i1-1}\ 0\ B_K) \vdash^{m-1}$
$(q_1, B_Z\ 1'\ 1^{m-1}\ \uparrow 0\ S\ 1^{i1-1}\ 0\ B_K) \vdash$
$(q_2, B_Z\ 1'\ 1^{m-1}\ 0\ \uparrow S\ 1^{i1-1}\ 0\ B_K) \vdash^{m+2}$

$(q_7, \uparrow B_Z\ 1^{m}\ 0\ S\ 1^{i1-1}\ 0\ B_K) \vdash$
$(q_A, B_Z\ \uparrow 1^{m}\ 0\ S\ 1^{i1-1}\ 0\ B_K) \vdash^{m+1}$
$(q_A, B_Z\ 1^{m}\ 0\ \uparrow S\ 1^{i1-1}\ 0\ B_K) \vdash$
$(q_A, B_Z\ 1^{m}\ 0\ \underline{1}\ \uparrow 1^{i1-1}\ 0\ B_K) \vdash^{i1}$
$(q_A, B_Z\ 1^{m}\ 0\ 1^{i1}\ 0\ \uparrow B_K) \vdash$
$(q_{AKC}, B_Z\ 1^{m}\ 0\ 1^{i1}\ 0\ \uparrow B_K)$.

Koniec dôkazu lemy.
Teraz chceme dokázať **hlavný dôkaz:**
Máme k čísel. Utriedime ich tak, že budú rásť smerom doprava.
Dôkaz:
-Bez MI:
Našim Max-sortom ich utriedime tak, že úplne vpravo bude
najväčšie číslo z nich a zvýši k-1 menších čísel. Tie budeme triediť rovnako.
Dostaneme k utriedených čísel.
-S MI:
MI vzhľadom na j-te najväčšie číslo. (j<=k)
1˚ j=1 dokázali sme už v leme:

1.najväčšie číslo sa presunie na poslednú pozíciu, označíme si jeho začiatok, aby sa triedili už iba čísla pred ním.

2˚ j>=2

Predpokladajme,že zo zvyšných k-j+1 čísel vieme vybrať najväčšie tak, aby sa dostalo znova na "koniec", teda na miesto pred posledne ukladané najvyššie číslo. Potom najväčšie zo zvyšných k-j sa podľa lemy dostane doprava až pred maximálne číslo z tých k-j+1 čísel. Tieto dve sú teda utriedené a keďže takto utriedime ľubovoľné j-te číslo, 2<=j<=k, utriedili sme ich všetky.

Koniec dôkazu.