Prezentácia FoJa príklad 4.2

Miroslav Jasso

March 13, 2001

Zadanie:

Pomocou LBA (lineárne ohraničených automatov) dokážte uzavretosť triedy kontextových jazykov na inverzný homomorfizmus. Teda, pre daný LBA A a homorfizmus h zostrojte LBA A', taký $L(A') = h^{-1}(L(A)) = \{w|h(w) \in L(A)\}$.

Riešenie:

Zostrojíme automat LBA A' tak, že z veľkej časti použijeme stavy pôvodneho automatu LBA A a pridáme niektore stavy navyše ako riadiace stavy LBA A'.

Nech $L_1 \in L_{CS} \Rightarrow \exists$ LBA A_1, taký, že $L(A_1) = L_1$. Nech $h : \sum_h^* \to L_1$. Potrebujeme skonštruovať LBA A_2. taký, že $L(A_2) = h^{-1}(L(A_1)) = \{w|h(w) \in L(A_1)\}$, čiže $h(L(A_2)) = (L(A_1)$.

Nech teda $A_1 = (K_1, \sum_1, \Gamma_1, \delta_1, q_{10}, F_1)$ a $A_2 = (K_2, \sum_h, \Gamma_2, \delta_2, q_{20}, F_1)$. Zadefinujme $\Gamma_2 = \{uHv|(H = E \vee H = F) \wedge uv \in L_1 \cup \{\epsilon\}\}$ a $K_2 = K_1 \cup \{q_{20}, q_{21}\}$. Prvky množiny K_1budeme označovať q_{1k}, kde k. Nasleduje konštrukcia funkcie δ_2:

1. $\delta_2(q_{20}, \%) = \{(q_{20}, \%, 1)\}$
2. $\delta_2(q_{20}, x) = \{(q_{20}, y, 1)\}, x \in \sum \wedge y \in \Gamma_2 \wedge y = Ez \wedge z = h(x)$
3. $\delta_2(q_{20}, \$) = \{(q_{21}, \$, -1)\}$
4. $\delta_2(q_{21}, y) = \{(q_{21}, y, -1)\}, y \in \Gamma_2$
5. $\delta_2(q_{21}, \%) = \{(q_{10}, \%, 0)\}$
6.$\delta_2(q_{1k}, \%) = \{(q_{1k}, \%, m)|(q_{1k}, \%, m) \in \delta_1(q_{1k}, \%)\}, m \in \{0.1\}$
7. $\delta_2(q_{1k}, \$) = \{(q_{1k}, \$, m)|(q_{1k}, \$, m) \in \delta_1(q_{1k}, \$)\}, m \in \{-1.0\}$
8. $\delta_2(q_{1k}, E) = \{(q_{1l}, F, 1)\}$
9. $\delta_2(q_{1k}, F) = \{(q_{1l}, E, -1)\}$
10. $\delta_2(q_{1k}, uHav) = \{(q_{1l}, uHbv, 0)|(q_{1l}, b, 0) \in \delta_1(q_{1k}, a)\}, a, b \in \Gamma_1 \wedge (H = E \vee H = F)$
11. $\delta_2(q_{1k}, Haw) = \{(q_{1l}, Ebw, -1)|(q_{1l}, b, -1) \in \delta_1(q_{1k}, a)\}, a, b \in \Gamma_1 \wedge (H = E \vee H = F)$
12. $\delta_2(q_{1k}, wHa) = \{(q_{1l}, wFb, 1)|(q_{1l}, b, 1) \in \delta_1(q_{1k}, a)\}, a, b \in \Gamma_1 \wedge (H = E \vee H = F)$
13. $\delta_2(q_{1k}, uaHv) = \{(q_{1l}, uEbv, 0)|(q_{1l}, b, -1) \in \delta_1(q_{1k}, a)\}, a, b \in \Gamma_1 \wedge (H = E \vee H = F)$

14. $\delta_2(q_{1k}, uHacv) = \{(q_{1l}, ubFcv, 0) | (q_{1l}, b, 1) \in \delta_1(q_{1k}, a)\}, a, b, c \in \Gamma_1 \wedge (H = E \vee H = F)$

(znak % používam na označenie začiatku pásky)

Automat LBA A' akceptuje vtedy a len vedy ak akceptuje aj pôvodný automat LBA A.

Dôkaz:

Pravidlo 1. Pravidlom 1. $\delta_2(q_{20}, \%) = \{(q_{20}, \%, 1)\}$ sa hlava LBA A' posunie zo začiatočného znaku o 1 znak dopredu na prvé písmenko pásky a na páske nechá znak centu.

Pravidlo 2. Pravidlom 2. $\delta_2(q_{20}, x) = \{(q_{20}, y, 1)\}, x \in \sum \wedge y \in \Gamma_2 \wedge y = Ez \wedge z = h(x)$ sa hlava A' dostane na posledné písmenko na páske a pritom dané písmenká prepisuje na poschodové znaky /tvorí viacstopú pásku/ a to tak, že na začiatok poschodového znaku zapíše symbol hlavy /E/ a ďalej zapíše homomorfný obraz daného načítaného písmenka.

Pravidlo 3. Pravidlom 3. $\delta_2(q_{20}, \$) = \{(q_{21}, \$, -1)\}$ sa znovu hlava A' vráti na posledné písmeno / teraz už poschodového znaku/ potom čo sme sa dostali na koniec pásky a na pásku zapíše dolár.

Pravidlo 4. Pravidlom 4. $\delta_2(q_{21}, y) = \{(q_{21}, y, -1)\}, y \in \Gamma_2$ sa hlava automatu A' vráti na začiatok pásky pričom nič na páske neprepisuje.

Pravidlo 5. Pravidlom 5. $\delta_2(q_{21}, \%) = \{(q_{10}, \%, 0)\}$ sa hlava A' zastaví na znaku cent /a potom sa začne simuláciu pôvodného automatu LBA A./

Pravidlá 6,7. Pravidlami 6.$\delta_2(q_{1k}, \%) = \{(q_{1k}, \%, m) | (q_{1k}, \%, m) \in \delta_1(q_{1k}, \%)\}, m \in \{0.1\}$ a

7. $\delta_2(q_{1k}, \$) = \{(q_{1k}, \$, m) | (q_{1k}, \$, m) \in \delta_1(q_{1k}, \$)\}, m \in \{-1.0\}$ začína A' simuláciu A. Tieto pravidlá ošetrujú prípady na začiatku a konci pásky, teda znaky cent a dolár. A' robí teda pri týchto znakoch /ktoré sú obyčajné znaky a nie poschodové / presne to isté čo robí A a teda zapezpečuje simuláciu A na týchto hraničných znakoch.

Pravidlá 8,9. Pravidlami 8. $\delta_2(q_{1k}, E) = \{(q_{1l}, F, 1)\}$ a

9. $\delta_2(q_{1k}, F) = \{(q_{1l}, E, -1)\}$ sa ošetrujú prádzne znaky. To sú prípady ak homomorfným obrazom daného písmenka z pôvodnej pásky bol epsilon. Ak teda príde hlava A' na takýto prázdny znak /je tu len znak E alebo F/ prejde na ďalší poschodový znak a podľa znaku E alebo H /E je pohyb doprava a H je pohyb doľava/ ,teda príslušná delta funkcia prejde doprava, alebo doľava a zároveň prepíše tento smerovací znak podľa toho akým smerom sa vyberie.

Pravidlo 10. Pravidlom 10. $\delta_2(q_{1k}, uHav) = \{(q_{1l}, uHbv, 0) | (q_{1l}, b, 0) \in \delta_1(q_{1k}, a)\}, a, b \in \Gamma_1 \wedge (H = E \vee H = F)$ ošetruje nasledovnú situáciu. Pôvodný automat A ostáva stáť na mieste a len prepíše načítaný znak. A' sa v poschodovom znaku takisto nepohne a len prepíše danú časť poschodového znaku. Predpokladom však je že Hlava je niekde "uprostred" poschodového znaku. Teda pred smerovým znakom sú nejaké písmenká a aj za ním sú nejaké písmenká.

Pravidlo 11. Pravidlom 11. $\delta_2(q_{1k}, Haw) = \{(q_{1l}, Ebw, -1) | (q_{1l}, b, -1) \in \delta_1(q_{1k}, a)\}, a, b \in \Gamma_1 \wedge (H = E \vee H = F)$ ošetruje nasledujúcu situáciu. Pôvodný automat A sa po prečítaní daného písmenka a jeho opätovnom prepísaní posúva doľava a A' je práve na začiatku poschodového znaku /a teda sa v tomto znaku nemá kde posunúť vľavo/ . A' tiež prepíše daný znak a posúva sa na páske doľava na predošlý poschodový znak. /V tom poschodovom znaku bude smerovací znak = virtuálna čitacia hlava na poslednom písmenku , čo znamená na tom písmenku ktoré by na mormálnej páske bolo naľavo od toho písmenka ktoré sme pred posunutím doľava prepísali - takto zabezpečujeme plynulý prechod medzi poschodovými znakmi doľava/.

Pravidlo 12. Pravidlom 12. $\delta_2(q_{1k}, wHa) = \{(q_{1l}, wFb, 1) | (q_{1l}, b, 1) \in \delta_1(q_{1k}, a)\}, a, b \in \Gamma_1 \wedge (H = E \vee H = F)$ ošetrujeme nasledovnú situáciu. Pôvodný automat A sa po prepísaní daného znaku posúva doprava a automat A je na konci poschodového znaku a teda sa v tomto poschodovom znaku nemôže posunúť doprava. Rieši to tak, že po prepísaní daného písmenka na konci poschodového znaku sa presunie na páska doprava na ďalší poschodový znak. / Tu je naša virtuálna čítacia hlava na začiatku poschodového znaku a teda sa tým zabezpečí plynulý prechod medzi poschodovvými znakmi doprava/.

Pravidlá 13, 14. Pravidlami 13. $\delta_2(q_{1k}, uaHv) = \{(q_{1l}, uEbv, 0) | (q_{1l}, b, -1) \in \delta_1(q_{1k}, a)\}, a, b \in \Gamma_1 \wedge (H = E \vee H = F)$ a

14. $\delta_2(q_{1k}, uHacv) = \{(q_{1l}, ubFcv, 0) | (q_{1l}, b, 1) \in \delta_1(q_{1k}, a)\}, a, b, c \in \Gamma_1 \wedge (H = E \vee H = F)$ sa rieši situácia pohybovania sa po poschodovom znaku pokiaľ nie sme na začiatku a konci poschodového znaku a teda sa môžme posúvať doprava aj doľava. Situácia vyzerá nasledovne. Pôvodný automat A prepíše písmenko a posunie sa doprava, alebo doľava. Automat A' to rieši tak, že prepíše danú časť poschodového znaku /tú čo prislúcha danému znaku čo prepísal pôvodný automat A/ a vrámci poschodového znaku sa posunie doľava či doprava tak, že posunie virtuálnu čítaciu hlavu o jedno miesto doprava , či doľava. Na reálnej páske sa neposúva a zostáva na danom poschodovom znaku.

Daná delta funkcia teda spracováva všetky možné prípady posunu na páske a aj možné komplikácie prechodu mezdi jednotlivými poschodovými znakmi. LBA A' simuluje správanie LBA A a zároveň má zapezpečené správne spracovanie poschodových znakov. LBA A' teda akceptuje vtedy a len vtedy ak akceptuje aj LBA A.