Miroslav Sány, 2i3

Úloha č.2

Zadanie:

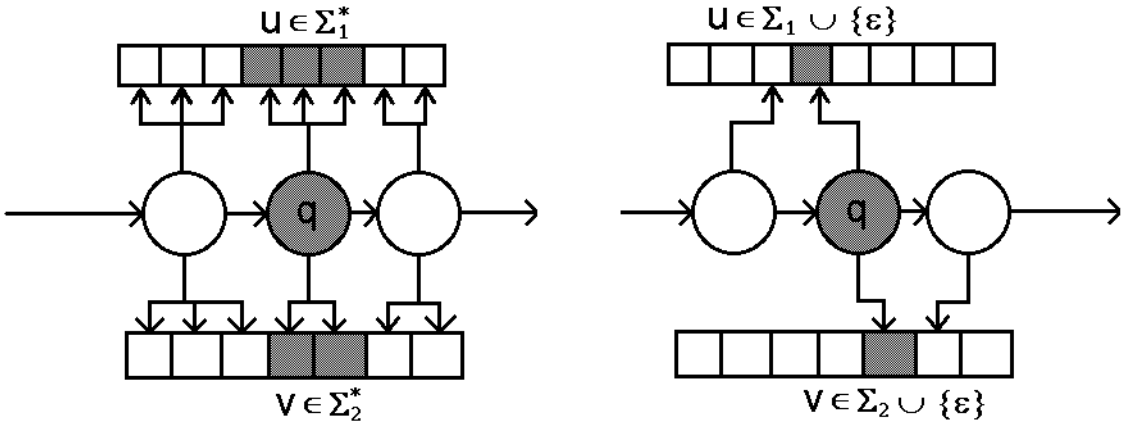
I) Zadefinujte 1-ohraničený normálny tvar pre a-prekladače taký, že a prekladač je 1-ohraničený, ak môže čítať a zapisovať najviac jeden znak, t.j. ak $(q,u,v,p) \in H$ potom $|u| \leq 1$ a $|v| \leq 1$.

II) Dokážte, že trieda a-prekladačov je uzavretá na skladanie zobrazení, teda $\forall M_1, M_2 \; \exists \; M_3$ také, že $M_3(L) = M_2(M_1(L))$

Riešenie I:

Def: Konečnostavový prekladač s akceptačnými stavmi je 6-tica (K, Σ_1, Σ_2, H, q_0, F)

$H \subseteq K \times \Sigma_1^* \times \Sigma_2^* \times K$

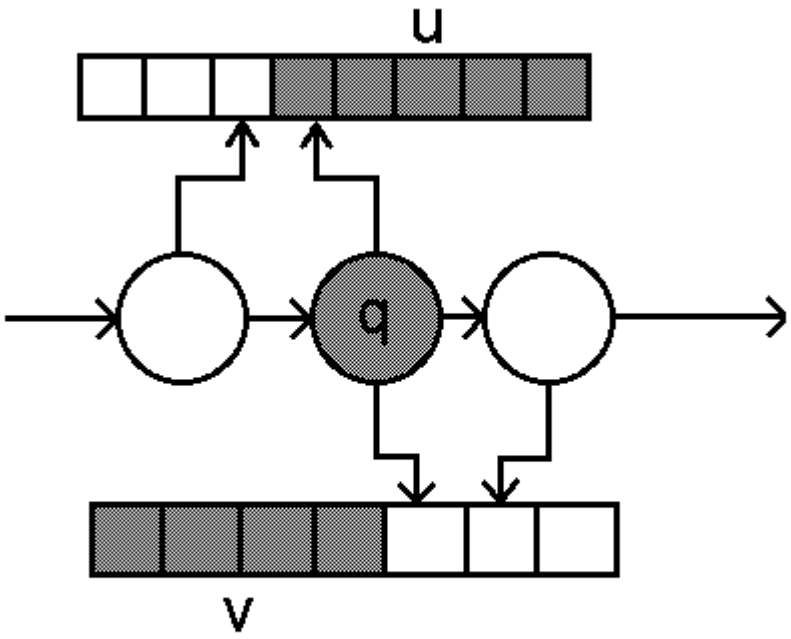


a-prekladač

1-ohraničený a-prekladač

Def: 1-ohraničený konečnostavový prekladač s akceptačnými stavmi je 6-tica (K, Σ_1, Σ_2, H, q_0, F)

$H \subseteq K \times (\Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}) \times (\Sigma_2 \cup \{\varepsilon\}) \times K$



Konfigurácia

Def: *Konfiguráciou* 1-ohraničeného a-prekladača nazývame usporiadanú trojicu (q, u, v).

Def: *Krokom odvodenia* 1-ohraničeného a-prekladača nazývame reláciu |-- definovanú:

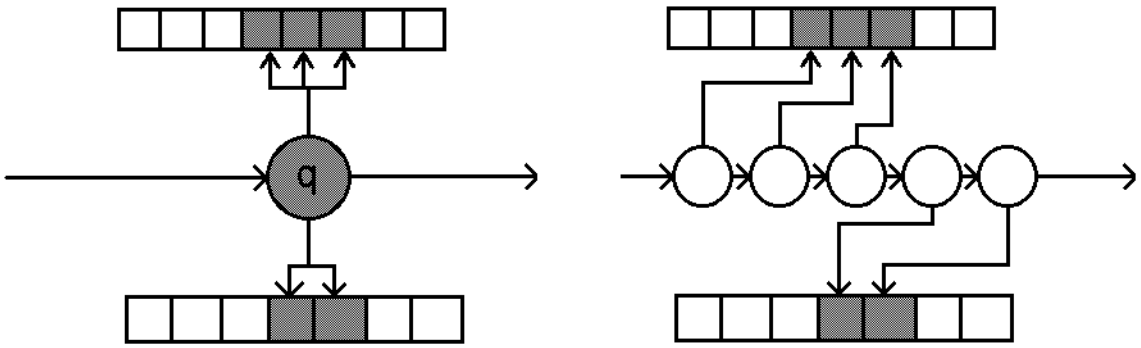
$$(q, xu, v) \vdash (p, u, vy) \Leftrightarrow (q, x, y, p) \in H$$

Def: Obrazom jazyka L 1-ohraničeného a-prekladača M nazývame jazyk:

$$M(L) = \{ v \in \Sigma_2^* \mid (\exists w \in L) ; (q_0, w, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, v); \; q \in F \}$$

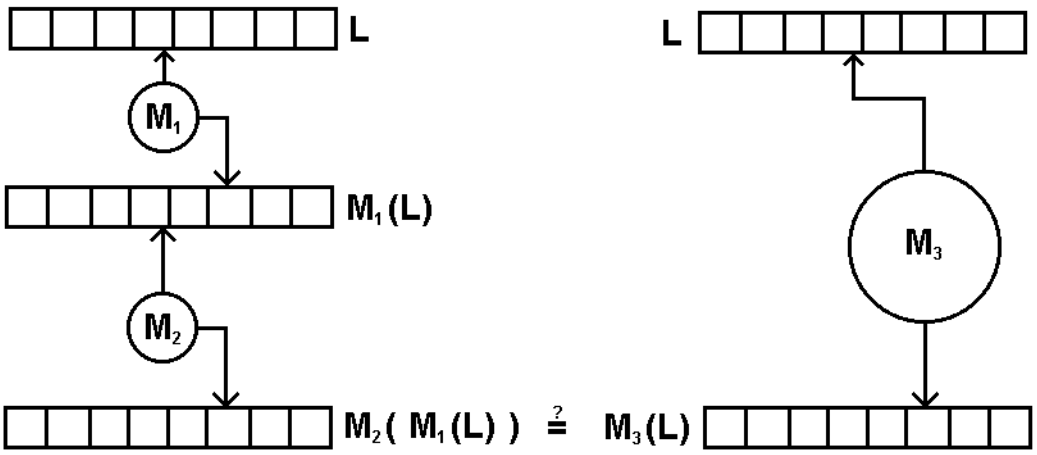
Riešenie II:

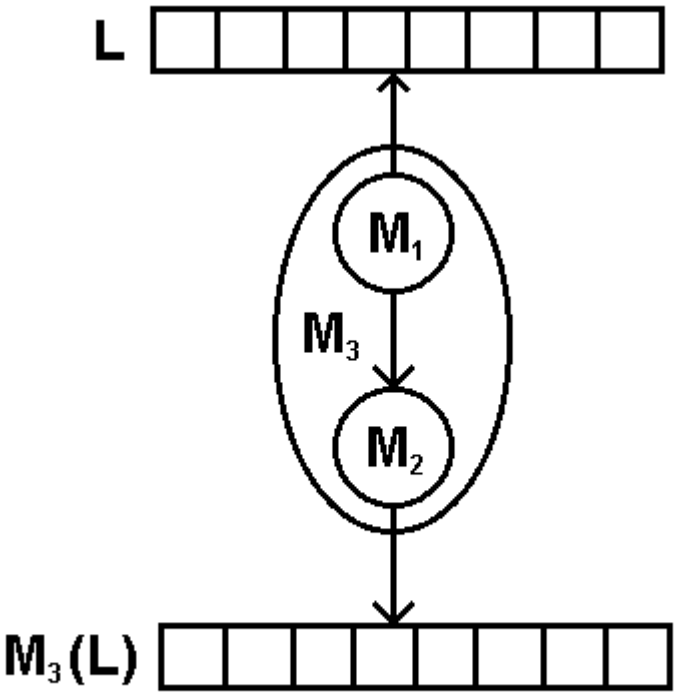
Lemma: Pre a-prekladač M existuje 1-ohraničený a-prekladač v normálnom tvare M' taký, že M(L) = M'(L) pre $\forall L (\subseteq \Sigma_1^*)$



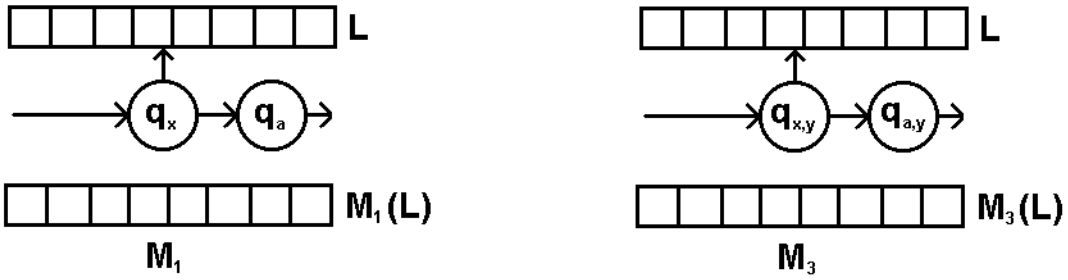
1-ohraničený a-prekladač v normálnom tvare

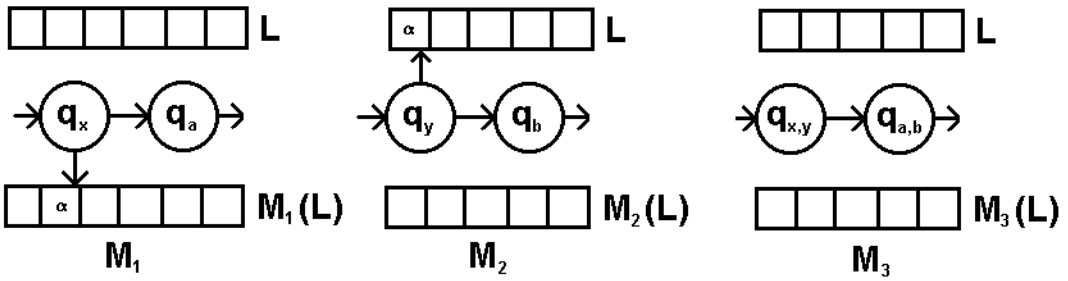
Dôkaz ulohy II:

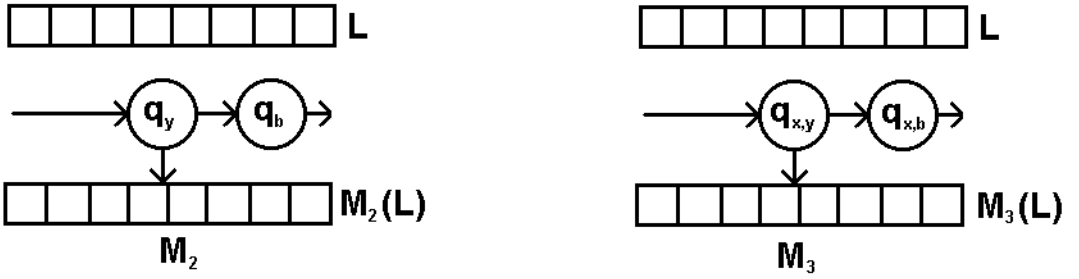




Konštrukcia prekladača







Def: 1-ohraničený konečnostavový prekladač s akceptačnými stavmi je 6-tica (K, Σ_1, Σ_2, H, q_0, F), kde

K - je konečná množina stavov
Σ_1 - je vstupná abeceda
Σ_2 - je výstupná abeceda
$H \subseteq K \times (\Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}) \times (\Sigma_2 \cup \{\varepsilon\}) \times K$
q_0 - je počiatočný stav
F - je množina akceptačných stavov

Def: Konfiguráciou 1-ohraničeného a-prekladača nazývame usporiadanú trojicu (q, u, v), kde

q - je momentálny stav prekladača
u - je zvyšok vstupu
v - je deterajší výstup

Def: Krokom odvodenia 1-ohraničeného a-prekladača nazývame reláciu TT definovanú:

$(q, xu, v) \; TT \; (p, u, vy) \Leftrightarrow (q, x, y, p) \in H$

Def: Obrazom jazyka L 1-ohraničeného a-prekladača M nazývame jazyk:

$M(L) = \{ v \in \Sigma_2^* \mid (\exists w \in L) ; (q_0, w, \varepsilon) \; TT^* \; (q, \varepsilon, v) ; q \in F \}$

Dôkaz lemmy: Nech $M = (K, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_0, F)$, potom $M' = (K', \Sigma_1, \Sigma_2, H', q_0', F')$

Ak $(q, u_1u_2 \ldots u_n, v_1v_2 \ldots v_m, p) \in H$ potom

$\{ (q', u_1, \varepsilon, q_1'), (q_1', u_2, \varepsilon, q_2'), \ldots, (q_{n-1}', u_n, \varepsilon, q_n'),$

$(q_n', \varepsilon, v_1, q_{n+1}'), (q_{n+1}', \varepsilon, v_2, q_{n+2}'), \ldots, (q_{n+m-1}', \varepsilon, v_m, p') \} \subseteq H'$

Ak $q \in F$ potom $q_{n+m-1}' \in F'$ (to značí, že akceptuje až keď načíta a zapíše všetky symboly)

Týmto sme rozdelili každý krok a-prekladača M na dve časti: v stavoch $q' \ldots q_{n-1}'$ bude náš a-prekladac M' po symboloch načitávať vstupné slovo a v stavoch $q_n' \ldots p'$ bude dávať na výstup slovo taktiež po symboloch.

Keďže akceptačné stavy ostanú zachované a krok v a-prekladači M (zo stavu q do stavu p) je ekvivalentný s krokom v a-prekladači M' (zo stavu q' do stavu p'), potom aj M(L) = M'(L).

Dôkaz ulohy II: Podľa lemmy môžeme predpokladať, že a-prekladače M_1 a M_2 sú 1-ohraničené a "delta funkciu" majú v takom tvare ako je uvedené v lemme.
Nech $M_1 = (K', \Sigma_1, \Sigma_2, H', q_0', F')$, $M_2 = (K'', \Sigma_2, \Sigma_3, H'', q_0'', F'')$ potom $M_3 = (K, \Sigma_1, \Sigma_3, H, q_{0,0}, F)$. Označme stavy a-prekladačov M_1 - $q_0' \ldots q_n'$ a M_2 - $q_0'' \ldots q_m''$.

I) $(q_x', u, \varepsilon, q_a') \in H' \Leftrightarrow (q_{x,y}, u, \varepsilon, q_{a,y}) \in H$ //načítaj symbol ako M_1

II) $(q_x', \varepsilon, v, q_a') \in H' \wedge (q_y'', v, \varepsilon, q_b'') \in H'' \Leftrightarrow (q_{x,y}, \varepsilon, \varepsilon, q_{a,b}) \in H$ //miesto výstupu symbolu ho spracuj ako M_2

III) $(q_y'', \varepsilon, v, q_b'') \in H'' \Leftrightarrow (q_{x,y}, \varepsilon, v, q_{x,b}) \in H$ //výstup symbolu

$q_{x,y} \in F \Leftrightarrow q_x' \in F' \wedge q_y'' \in F''$

Teraz dokážem, že M_3 spracováva dané slovo $u \in L$ podobne ako $M_2(M_1(u))$.

1) ak $|u| = 0$ potom M_1 sa po spracovaní nachádza v stave q_0' a na výstup neposiela nič (ak je q_0' akceptačný stav), taktiež M_2 sa nachádza v stave q_0'' a na výstupe nemá nič (ak je q_0'' akceptačný stav)
2) Indukčný predpoklad: nech $|u| = k$ potom sa po spracovaní daného vstupu nachádza M_1 v stave q_x', M_2 v stave q_y'',M_3 v stave $q_{x,y}$, M_1 má na výstupe $v \in M_1(L)$, M_2 má na výstupe $w \in M_2(M_1(L))$ a M_3 má na výstupe taktiež w.

   Inak povedané:

   Pre $\forall u \in L : |u| = k : \exists$ x,y,v,w také, že
   $(q_0', u, \varepsilon) \vdash^* (q_x', \varepsilon, v)$ v prekladači M_1
   $(q_0'', v, \varepsilon) \vdash^* (q_y'', \varepsilon, w)$ v prekladači M_2
   $(q_{0,0}, u, \varepsilon) \vdash^* (q_{x,y}, \varepsilon, w)$ v prekladači M_3 .

3) Nech u = u'u'', kde |u'| = k ∧ |u''| = 1. Podľa indukčného predpokladu vieme, že po spracovaní u' sa nachádza M_1 v konfigurácii (q_x', u'', v), M_2 má konfiguráciu (q_y'', v'', w) a M_3 je v konfigurácii ($q_{x,y}$, u'', w).
//v'' reprezentuje symboly, ktoré ešte vyprodukuje M_1, ktoré ešte nevieme, lebo M_2 pracuje až po ukončení M_1

Teraz môže M_1 a M_3 (podľa pravidla I) načítať posledný symbol u'' teda:
(q_x', u'', v) |-- (q_a', ε, v), ($q_{x,y}$, u'', w) |-- ($q_{a,y}$, ε, w)

Ešte môže M_1 poslať na výstup niekoľko symbolov, ktoré M_2 načíta a spracuje (podľa pravidla II) a následovne pošle na výstup (podľa pravidla III):
(q_a', ε, v) |-- (q_{a1}', ε, v.v_1), (q_y'', v_1, w) |--* (q_{b1}', ε, w.w_1)
($q_{a,y}$, ε, w) |--* ($q_{a1,b1}$, ε, w.w_1)
čo sa môže niekoľko krát zopakovať napr.
(q_{a1}', ε, v.v_1) |-- (q_{a2}', ε, v.v_1.v_2), (q_{b1}'', v_2, w.w_1) |--* (q_{b2}', ε, w.w_1.w_2)
($q_{a1,b1}$, ε, w.w_1) |--* ($q_{a2,b2}$, ε, w.w_1.w_2)
…

Z toho vyplýva, že aj slová dĺžky k+1 spĺňajú indukčný predpoklad.

Z indukcie vyplýva, že výstup prekladača M_3 je zhodný s výstupom M_2(M_1) a keďže akceptačné stavy v M_3 sú zhodné s akceptačnými stavmi prekladačov M_2 a M_1 potom $M_3(L) = M_2(M_1(L))$.