Formálne jazyky a automaty

Copyright © 2001 Ondrej Jombík

February 23, 2001

1 Zadanie

Zostrojte kontextovú gramatiku G pre jazyk

$$\mathrm{L}=\{ww^Rw \mid w \in \{a,b\}^+\}$$

a dokážte správnost' konštrukcie, teda že platí L=L(G).

2 Riešenie

Uvažujme kontextovú gramatiku G pre daný jazyk, takú že

$$\mathrm{G}=(\mathrm{N},\ \mathrm{T},\ \mathrm{P},\ \sigma),$$

kde $\mathrm{N}=\{X_1,X_2,T_1,T_2,A,B,\sigma\}$, $\mathrm{T}=\{a,b\}$, $\mathrm{P}=\{p_{10},p_{20},p_{21},p_{30},p_{31},p_{32},p_{33},p_{40},p_{41},p_{42},p_{43},p_{50},p_{51}\}$ pričom platí, že

$$\begin{array}{lrcl}
p_{10} & \sigma & \rightarrow & X_1T_1 \mid X_2T_2 \\
\\
p_{20} & X_1 & \rightarrow & aa \mid aX_1Aa \mid bX_1Bb \\
p_{21} & X_2 & \rightarrow & bb \mid aX_2Aa \mid bX_2Bb \\
\\
p_{30} & Aa & \rightarrow & aA \\
p_{31} & Ab & \rightarrow & bA \\
p_{32} & Ba & \rightarrow & aB \\
p_{33} & Bb & \rightarrow & bB \\
\\
p_{40} & AT_1 & \rightarrow & aT_1 \\
p_{41} & AT_2 & \rightarrow & aT_2 \\
p_{42} & BT_1 & \rightarrow & bT_1 \\
p_{43} & BT_2 & \rightarrow & bT_2 \\
\\
p_{50} & T_1 & \rightarrow & a \\
p_{51} & T_2 & \rightarrow & b
\end{array}$$

3 Dôkaz

L(G) $\subseteq$ L:

Chceme dokázat, že všetky slová získané gramatikou G patria do jazyka L. Uvažujme ako vyzerá slovo vygenerované gramatikou G a skúmajme príslušné pravidlá.

Na začiatku máme slovo σ a po aplikovaní pravidiel p_{10},p_{20},p_{21} dostávame slovo v tvare wxT_i, kde $i=\{1,2\}$ a podslovo x po vypustení neterminálov A,B je vlastne w^R. Ak teda ignorujeme

neterminálové pismená A a B, máme slovo v tvare ww^RT_i $(i = \{1,2\})$.

Pravidlá $p_{30}, p_{31}, p_{32}, p_{33}$ majú za úlohu presúvat' neterminály A a B na koniec slova. Toto sa využíva v spolupráci s d'alšími pravidlami p_i, kde $i >= 40$.

Ďalej pravidlá $p_{40}, p_{41}, p_{42}, p_{43}$ transformujú najkrajnejší neterminál A, resp. B na terminál a, resp. b, pričom sa nad'alej využívajú predchádzajúce pravidlá na posúvanie neterminálov A a B smerom na koniec slova.

Ako úplne na záver sa použijú pravidlá p_{50}, p_{51} na finálnu konverziu koncového neterminálu T_1, resp. T_2 na terminál a, resp. b, po čom konečne dostávame slovo tvaru ww^Rw.

A tým je inklúzia L(G)$\subseteq$L dokázaná.

L $\subseteq$ L(G):

Chceme dokázat, že všetky slová z jazyka L sa dajú získat' gramatikou G. Dôkaz vykonáme matematickou indukciou vzhl'adom na dĺžku slova u, kde $|u| = n$.

Predpokladáme, že ak $u \in L$ vieme generovat' gramatikou G, tak vieme generovat' aj slovo $u' \in L$ ak platí $|u'| = |u| + 3$.

1° Nech $n = 3$. Odvodenie slova u potom bude

$$\sigma \Rightarrow_{p_{10}} X_1T_1 \Rightarrow_{p_{20}} aaa = u$$

resp.

$$\sigma \Rightarrow_{p_{10}} X_2T_2 \Rightarrow_{p_{21}} bbb = u$$

2° Musíme dokázat', že ak tvrdenie platí pre n, tak platí aj pre $n+3$. Majme teda slovo

$$u' = ww^Rw, \text{ kde } w \in \{a,b\}^+,$$

ktorého tvar odvodenia je

$$\sigma \Rightarrow_{p_{10}} X_iT_i \Rightarrow^{n-1}_{(p_{20}|p_{21})} vX_iZT_i \Rightarrow^{*}_{(p_{30}|p_{31}|p_{32}|p_{33})} vX_iv^RV^RT_i \Rightarrow^{n-1}_{(p_{40}|p_{41}|p_{42}|p_{43})}$$
$$vX_iv^RvT_i \Rightarrow^{*}_{(p_{20}|p_{21}|p_{50}|p_{51})} ww^Rw = u$$

kde $i \in \{1,2\}$, $Z \in \{A,B,a,b\}$, pričom platí $\#_av = \#_aZ = \#_AZ$, $\#_bv = \#_bZ = \#_BZ$. Teda $|Z| = 2|v|$. Ďalej platí, že V je rovnaké slovo ako v, akurát, že na príslušných miestach obsahuje namiesto terminálov neterminály, tj. namiesto a obsahuje A a namiesto b obsahuje B.

Dokážme teraz, že vieme vygenerovat' aj slovo

$$u' = wxxw^Rwx, \text{ kde } w \in \{a,b\}^+ \text{ a } x \in \{a,b\}.$$

Jeho tvar odvodenia teda bude

$$\sigma \Rightarrow_{p_{10}} X_iT_i \Rightarrow^{n-1}_{(p_{20}|p_{21})} vX_iZT_i \Rightarrow_{(p_{20}|p_{21})} vxX_iXxZT_i \Rightarrow^{*}_{(p_{30}|p_{31}|p_{32}|p_{33})}$$
$$vxX_ixv^RXV^RT_i \Rightarrow^{n-1}_{(p_{40}|p_{41}|p_{42}|p_{43})} vxX_ixv^RvxT_i \Rightarrow^{*}_{(p_{20}|p_{21}|p_{50}|p_{51})} wxxw^Rwx = u'.$$

Teda vieme gramtikou G generovat' každé slovo z jazyka L, čím sme inklúziu L$\subseteq$L(G) dokázali.

Ked'že L(G)$\subseteq$L a zároveň L$\subseteq$L(G), tak potom L(G)=L.

4 Záver

Úlohu sa mi podarilo úspešne vyriešit' a dokázat'.