**Zadanie:**
**Dokážte, že problém konečnosti jazyka je pre bezkontextové jazyky rozhodnuteľný.**

Pre daný $L \in L_{CF}$ treba rozhodnúť, či L je konečný alebo nie.

Riešenie: daný problém prevediem na problém prázdnosti pre bezkontextové jazyky.

Vieme, že podľa pumpovacej lemy pre bezkontextové jazyky existujú pre $\forall\ L \in L_{CF}$ nad abecedou $\Sigma$ čísla p, q také, že $\forall\ w \in L$, $|w|>p$, $\exists$ u, v, x, y, z $\in \Sigma^*$ také, že

1. $w = uvxyz$
2. $vy \neq \varepsilon$
3. $|vxy| \leq q$
4. $\forall\ i \geq 0 : uv^i xy^i z \in L$

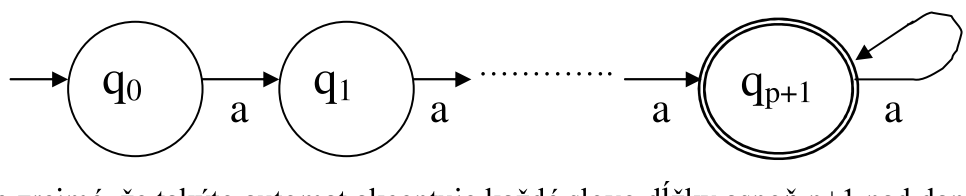
Teda ak v jazyku L existuje slovo (resp. slová) dĺžky viac ako p, potom zo 4. bodu vyplýva, že jazyk L je nekonečný.

Či nejaký jazyk $L \in L_{CF}$ nad abecedou $\Sigma$ obsahuje slová dlhšie ako p, zistíme tak, že urobíme $L \cap \Sigma^{p+1} \Sigma^*$. Keďže jazyk $\Sigma^{p+1} \Sigma^*$ je regulárny, potom prienik tohoto jazyka s bezkontextovým jazykom L bude bezkontextový jazyk. Ak je tento prienik neprázdny, je zrejmé, že jazyk L obsahuje slová dlhšie ako p, teda je nekonečný. V opačnom prípade je konečný.

A teraz trochu podrobnejšie:
Majme danú bezkontextovú gramatiku G = ( N, T, P, S ) takú, že L = L(G).
Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že G je $\varepsilon$-free a neobsahuje chain rules.
(Keby taká nebola, tak štandardnými konštrukciami ju prevedieme na požadovaný tvar.)
Z dôkazu pumpovacej lemy vieme, že za p môžeme zvoliť číslo $m^{|N|+1}$,
kde $m = \max\{|w|;$ kde $X \rightarrow w \in P, X \in N\}$.

Zostrojme teraz deterministický konečný automat $A_p$ pre jazyk $\Sigma^{p+1} \Sigma^*$.
$A_p = ( K_p, \Sigma, \delta_p, q_0, F_p )$, kde $K = \{q_0, q_1, \ldots, q_{p+1}\}$, $\Sigma = T$, $F_p = \{q_{p+1}\}$.

$$\delta_p(q_i, a) = q_{i+1} \quad i \in \{0, \ldots, p\},\ a \in \Sigma$$
$$\delta_p(q_{p+1}, a) = q_{p+1} \quad a \in \Sigma$$




Je zrejmé, že takýto automat akceptuje každé slovo dĺžky aspoň p+1 nad danou abecedou, teda akceptuje jazyk $\Sigma^{p+1} \Sigma^*$.

Zhrnutie:
V tomto momente máme definované dva jazyky. Jeden je bezkontextový a je definovaný bezkontextovou gramatikou a druhý je regulárny, definovaný cez det. konečný automat. Vieme, že prienik bezkontextového a regulárneho jazyka je bezkontextový jazyk. Pokúsme sa teraz použitím štandardných konštrukcií zostrojiť bezkontextovú gramatiku pre prienik týchto dvoch jazykov.

Najprv k danej bezkontextovej gramatike G zostrojím automat $A_G$, akceptujúci L(G) prázdnou pamäťou.
Teda ak G = ( N, T, P, S), potom $A_G = ( K_G=\{q_0\}, \Sigma =T, \Gamma_G=T \cup N, \delta_G, q_0, S, \emptyset )$, kde

$\delta_G(q_0, \varepsilon, X) = \{(q_0, u^R) \mid X\rightarrow u \in P\} \quad \forall X\in N$
$\delta_G(q_0, a, a) = \{(q_0, \varepsilon)\} \quad \forall a\in T$

K tomuto automatu teraz zostrojím automat $A_F$, ktorý akceptuje ten istý jazyk koncovým stavom.
$A_F = ( K_F, \Sigma, \Gamma_F, \delta_G, q_0, z_0, F_F )$, kde
$K_F = \{q_0, q_1, q_2\}, \Gamma_F = \Gamma_G \cup\{z_0\}, F_G = \{q_2\}$

$\delta_F(q_0, \varepsilon, z_0 ) = \{(q_1, z_0S )\}$
$\delta_F(q_1, \varepsilon, X ) = \{( q_1, u^R) \mid X\rightarrow u \in P\} \quad \forall X\in N$
$\delta_F(q_1, a, a ) = \{(q_1, \varepsilon)\} \quad \forall a\in T \quad ( T = \Sigma )$
$\delta_F(q_1, \varepsilon, z_0) = \{(q_2, z_0)\}$

Tento automat v stave $q_0$ len pridá do zásobníka S, teda počiatočný zásobníkový symbol automatu $A_G$. Potom v stave $q_1$ simuluje prácu automatu $A_G$. Automat $A_G$ akceptuje vstupné slovo len vtedy, keď vyprázdni svoj zásobník. V takomto prípade zostane v zásobníku automatu $A_F$ len symbol $z_0$, čo spôsobí, že automat $A_F$ prejde do akceptačného stavu $q_2$.

Takže teraz, keď už máme pre jazyk L zásobníkový automat $A_F$ akceptujúci koncovým stavom a pre jazyk $\Sigma^{p+1}\Sigma^*$ deterministický konečný automat $A_p$, pristúpime k ďalšej štandardnej konštrukcii a síce zostrojíme zásobníkový automat A' akceptujúci koncovým stavom pre prienik týchto dvoch jazykov.

$A' = ( K_F\times K_p, \Sigma, \Gamma_F, \delta', [q_0, q_0], z_0, F_F\times F_p)$

$\delta'([q_0, q_0], \varepsilon, z_0) = \{([q_1, q_0], z_0S)\}$
$\delta'([q_1, q_i], \varepsilon, X ) = \{([q_1, q_i], u^R) \mid X\rightarrow u \in P\} \quad \forall X\in N, \; i\in \{0,\dots, p+1\}$
$\delta'([q_1, q_i], a, a ) = \{([q_1, q_{i+1}], \varepsilon)\} \quad \forall a\in \Sigma \quad ( \Sigma = T ), \; i\in \{0,\dots, p\}$
$\delta'([q_1, q_{p+1}], a, a ) = \{([q_1, q_{p+1}], \varepsilon)\} \quad \forall a\in \Sigma \quad ( \Sigma = T )$
$\delta'([q_1, q_i], \varepsilon, z_0) = \{([q_2, q_i], z_0)\} \quad i\in \{0,\dots, p+1\}$

Tento automat má len jeden koncový stav a síce $[q_2, q_{p+1}]$.

Aby sme k danému zásobníkovému automatu mohli pomocou štandardnej konštrukcie z prednášky zostrojiť bezkontextovú gramatiku, potrebujeme, aby náš automat akceptoval prázdnou pamäťou. V našom prípade sa to bude dať pomerne jednoducho zariadiť, a to niektorými drobnými úpravami.
Vieme, že automat A' akceptuje len vtedy, keď sa ocitne v akceptačnom stave. Prechod do tohoto stavu je možný len vtedy, keď sa v zásobníku nachádza jediný symbol $z_0$ (vyplýva to z daných štandardných konštrukcií). Ak chceme, aby tento automat akceptoval prázdnou pamäťou, stačí zabezpečiť vybratie tohoto symbolu zo zásobníka.

Jedna možnosť je napríklad:
pridanie ďalšieho riadku δ'-funkcie, konkrétne $\delta'([q_2, q_{p+1}], \varepsilon, z_0) = \{([q_2, q_{p+1}], \varepsilon)\}$, teda ak sa automat A' nachádzal v akceptačnom stave, môže zo zásobníka odstrániť symbol $z_0$, čím ho vyprázdni.
Je tu aj iná možnosť, ktorá nám neskôr trochu zjednoduší život.
My vôbec nemusíme zvýšiť počet riadkov δ'-funkcie. Automat A' akceptuje iba v stave $[q_2, q_{p+1}]$. Pokúsme sa upraviť posledný riadok δ'-funkcie tak, aby automat hneď vyprázdnil zásobník, keď má dané slovo akceptovať.

Teraz k automatu A' zostrojím zásobníkový automat A akceptujúci L(A') prázdnou pamäťou s príslušnou úpravou posledného riadku δ'-funkcie automatu A', pričom množinu stavov zredukujem na $\{q_0, q_1\}\times K_p$, keďže už nepotrebujem akceptačné stavy. Stačí, aby dané slovo bolo dostatočne dlhé a akceptované automatom $A_G$ (v takomto prípade sa automat $A_F$ dostane do konfigurácie $(q_1, \varepsilon, z_0)$, odkiaľ prejde do akceptačného stavu), náš automat A sa za tekejto situácie dostane do konfigurácie $([q_1, q_{p+1}], \varepsilon, z_0)$ a na základe posledného riadku definície δ-funkcie vyprázdni zásobník.

Teda $A = (\{q_0, q_1\}\times K_p, \Sigma, \Gamma_F, \delta, [q_0, q_0], z_0, \emptyset)$

$\delta([q_0, q_0], \varepsilon, z_0) = \{([q_1, q_0], z_0S)\}$
$\delta([q_1, q_i], \varepsilon, X) = \{([q_1, q_i], u^R) \mid X\to u \in P\}\ \ \forall X\in N,\ i\in\{0,\dots, p+1\}$
$\delta([q_1, q_i], a, a) = \{([q_1, q_{i+1}], \varepsilon)\}\ \ \forall a\in\Sigma\ \ (\Sigma = T),\ i\in\{0,\dots, p\}$
$\delta([q_1, q_{p+1}], a, a) = \{([q_1, q_{p+1}], \varepsilon)\}\ \ \forall a\in\Sigma\ \ (\Sigma = T)$
$\delta([q_1, q_{p+1}], \varepsilon, z_0) = \{([q_1, q_{p+1}], \varepsilon)\}$

Treba poznamenať, že nebolo nutné robiť celú túto konštrukciu cez automat $A_F$.
Keď si lepšie všimneme δ-funkciu automatu A zistíme, že ide v podstate o zlúčenie automatov $A_G$ a $A_p$ s tým, že máme o jeden zásobníkový viac, konkrétne $z_0$. Tento symbol sa zo zásobníka odstráni len vtedy, keď je dané slovo akceptované automatom $A_G$ (čiže $A_G$ má na konci výpočtu prázdny zásobník a vtedy na zásobníku automatu A zostane práve ono zmienené $z_0$) a zároveň dĺžka vstupného slova je dostatočná, čiže akceptuje ho aj $A_p$.

Teraz k automatu A akceptujúceho $L \cap \Sigma^{p+1} \Sigma^*$ prázdnou pamäťou zostrojím bezkontextovú gramatiku G' takú, že L(G') = N(A) použitím ďalšej štandardnej konštrukcie.

$G' = ( N', T', P', S' )$
$N' = \{S'\} \cup \{(p, z, q ) | \ p, q \in \{q_0, q_1\} \times K_p, z \in \Gamma_F \ \ (\Gamma_F = N \cup T \cup \{z_0\})\}$
$T' = T = \Sigma$

$P' = \{$

$S' \to ( [q_0, q_0], z_0, q ), \quad q \in \{q_0, q_1\} \times K_p$

$([q_0, q_0], z_0, q ) \to ([q_1, q_0], S, r)(r, z_0, q ), \quad r, q \in \{q_0, q_1\} \times K_p$

$([q_1, q_i], X, q ) \to ([q_1, q_i], u_n, r_n )(r_n, u_{n-1}, r_{n-1}) \ldots (r_2, u_1, q), \ \ q, r_2, \ldots, r_n \in \{q_0, q_1\} \times K_p$
$X \to u \in P \ \forall X \in N, \ u = u_1 \ldots u_n$

$([q_1, q_i], a, [q_1, q_{i+1}]) \to a \ \ \forall a \in T \ \ ( T = \Sigma ), \ i \in \{0, \ldots, p\}$
$([q_1, q_{p+1}], a, [q_1, q_{p+1}]) \to a \ \ \forall a \in T \ \ ( T = \Sigma )$

$([q_1, q_{p+1}], z_0, [q_1, q_{p+1}]) \to \varepsilon$
$\}$

Ostáva nám už len jediné, a to zistiť, či $L(G') = \emptyset$.
Stačí nájsť množinu neterminálov H, z ktorých sa dá odvodiť terminálne slovo nasledovným spôsobom:
$H =$ (zjednotenie cez všetky $i \in \{0, \ldots, |N'|\}$) $H_i$,
kde $H_0 = \{ X \in N' \mid \exists \ t \in (T')^*$ také, že $X \to t \in P'\}$,
$H_{i+1} = H_i \cup \{ X \in N' \mid \exists \ t \in (T' \cup H_i)^*$ také, že $X \to t \in P'\}$.

Ak do tejto množiny patrí S', potom je jazyk $L \cap \Sigma^{p+1} \Sigma^*$ neprázdny, teda L je nekonečný, v opačnom prípde, keď $S' \notin H$ (z S' sa nedá odvodiť terminálne slovo) je jazyk $L \cap \Sigma^{p+1} \Sigma^*$ prázdny, teda L je konečný.

Keďže každú z popísaných činností vieme urobiť algoritmicky, je problém konečnosti pre bezkontextové jazyky rozhodnuteľný, čbtd.