Úloha č. 2, sada 2

Peter Halický, 2i2

25. februára 2001

Úloha : dokázať uzavretosť triedy jazykov $\mathcal{L}_{CF}$ na operáciu zreťazenia pomocou lineárne ohraničených automatov.

Riešenie : Chceme dokázať nasledovné tvrdenie :

$$\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{CF} \Rightarrow L_1 L_2 \in \mathcal{L}_{CF}$$

Vezmime dva lineárne ohraničené automaty (ďalej len automaty) A_1, A_2, pre ktoré platí $L_1 = L(A_1), L_2 = L(A_2)$. Nájdeme automat A, pre ktorý platí $L = L_1 L_2 = L(A)$. Nech $A_i = (K_i, \Sigma_i, \Gamma_i, \delta_i, q_{0i}, F_i)$ pre $i \in \{1, 2\}$, pričom $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Tvrdíme, že potom

$$A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F_2)$$

kde

$$K = K_1 \cup K_2 \cup \{q_0, q_1, q_2, q_{f1}, q_{f2}\}$$

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \left\{ x^{\$} | x \in \Sigma \right\} \cup \{C\}$$

$$\left.\begin{array}{rrcl} \forall x \in \Sigma & \delta(q_0, x) & = & \{(q_0, x, 1), (q_1, x, 1)\} \\ \forall x \in \Sigma & \delta(q_1, x) & = & \left\{(q_2, x^{\$}, -1)\right\} \\ \forall x \in \Gamma - \{¢\} & \delta(q_2, x) & = & \{(q_2, x, -1)\} \\ & \delta(q_2, ¢) & = & \{(q_{01}, ¢, 1)\} \end{array}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{array}{rrcl} \forall q \in K_1 \ \forall x \in \Gamma_1 & \delta(q, x) & = & \delta_1(q, x) \\ \forall q \in K_1 \ \forall x \in \Gamma_1 & \delta(q, x^{\$}) & = & \delta_1(q, \$) - \\ & & & \left\{(q', y, d) | (d = 1) \vee (y \neq x^{\$})\right\} \\ \forall q \in F_1 \ \forall x \in \Gamma & \delta(q, x) & = & \{(q_{f1}, x, 0)\} \end{array}\right\} (2)$$

$$\left.\begin{array}{rrcl} \forall x \in \Gamma_1 & \delta(q_{f1}, x) & = & \{(q_{f1}, x, 1)\} \\ \forall x \in \Sigma & \delta(q_{f1}, x^{\$}) & = & \{(q_{f2}, x, -1)\} \\ \forall x \in \Sigma & \delta(q_{f2}, x) & = & \{(q_{02}, C, 1)\} \end{array}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{array}{rrcl} \forall q \in K_2 \ \forall x \in \Gamma_2 - \{¢\} & \delta(q, x) & = & \delta_2(q, x) \\ \forall q \in K_2 & \delta(q, C) & = & \delta_2(q, ¢) - \\ & & & \{(q', y, d) | (d = -1) \vee (y \neq C)\} \end{array}\right\} (4)$$

Automat A vykonáva svoju činnosť v nasledovných krokoch :

1. Najprv automat „rozdelí" slovo na niektorom mieste na dve časti, a to tak, že niektorý znak (nie \$ alebo ¢) „označí" symbolom \$, takže slovo w, na ktorom automat pracuje vyzerá nasledovne :

$$w = ¢ \restriction a_1 a_2 \ldots a_i a_{i+1}^{\$} \ldots a_n \$$$

2. Ďalej sa na slove w spustí „simulácia" automatu A_1, avšak s tým rozdielom, že sa na znakoch označených dolárom sa správa tak, ako sa správa A_1 na znaku \$, pričom sa však nemôže posunúť hlavou doprava[1] ani nemôže tento znak prepísať na nejaký iný. Z ľubovoľného stavu, ktorý je v automate A_1 konečný prejde A do ďalšej časti.

3. Do tejto časti sa dostaneme práve vtedy, keď prvá časť slova w patrí do jazyka L_1, teda vtedy, keď by túto prvú časť akceptoval automat A_1. V tejto časti odstráni zo znaku a_{i+1} označenie \$ a predchádzajúci znak (a_i) prepíše na C, takže slovo w vyzerá nasledovne :

$$w = ¢\, a_1 a_2 \ldots C \restriction a_{i+1} \ldots a_n \$$$

4. V tejto časti sa simuluje beh automatu A_2, s tým rozdielom, že symbol C je považovaný za ¢. Množina akceptačných stavov automatu A je rovnaká, ako automatu A_2, teda automat A akceptuje vstupné slovo práve vtedy, ak sa toto dá rozdeliť na dve slová také, že prvé z nich akceptuje automat A_1 a druhé automat A_2.

Nasleduje pokus o formálny dôkaz predošlých tvrdení :

1. Jediný možný postup výpočtu je nasledovný :
$(q_0, ¢ \restriction a_1 \ldots a_n\$) \vdash^i (q_0, ¢\, a_1 \ldots \restriction a_{i+1} \ldots a_n\$) \vdash (q_2, ¢\, a_1 \ldots \restriction a_i a_{i+1}^{\$} \ldots a_n\$) \vdash^i$
$(q_2, \restriction ¢\, a_1 \ldots a_i a_{i+1}^{\$} \ldots a_n\$) \vdash (q_{01}, ¢ \restriction a_1 \ldots a_i a_{i+1}^{\$} \ldots a_n\$)$

   Na tomto mieste sa treba pozastaviť a zamyslieť sa nad hodnotou i. Tu sa využíva nedeterminizmus automatu – ak existuje i také, že sa automat dostane do konečného stavu, vyberie si práve toto i.

2. Nech $w_1 = a_1 \ldots a_i$. Ak $w_1 \in L_1$, potom A_1 akceptuje slovo w_1. Ukážeme, že automat A presne kopíruje postupnosť stavov a pohybov hlavy automatu A_1.

   - Nech sa hlava nachádza na ľubovoľnom mieste slova w_1, ukazuje na ľubovoľný znak $x \in \Gamma_1$. Potom z našej definície funkcie δ vyplýva, že $\delta(q, x) = \delta_1(q, x)$.
   - Nech hlava ukazuje na (jediný) znak označený symbolom \$ (teda na a_{i+1}). Potom automat vykoná to isté, čo by vykonal automat A_1 na znaku \$, pričom mu však nedovolíme tento znak prepísať, ani sa pohnúť vpravo ($\delta(q, x^{\$}) = \delta_1(q, \$) - \{\ldots\}$).

[1] Definícia LBA nezakazuje pohyb na \$ vpravo, pretože to nevedie k platnej konfigurácii, teda sa nič nepokazí. V našom prípade by to však k tejto neviedlo, ale by sme sa dostali do druhej časti slova, čo je veľmi nežiadúce.

- Ak sa A dostane do stavu patriaceho do množiny F_1, simulácia sa ukončí (prísne vzaté, nemusí sa hneď ukončiť, môže pokračovať ďalej, ak to vedie k akceptácii - opäť sa tu využíva nedeterminizmus) a automat prejde do stavu q_{f1}.

3. Jediný možný výpočet :
$(q_{f1}, \cent a_1 \ldots \restriction a_k \ldots a_i a_{i+1}^{\$} \ldots a_n \$) \vdash^{i-k} (q_{f1}, \cent a_1 \ldots \restriction a_{i+1}^{\$} \ldots \$) \vdash$
$(q_{f2}, \cent a_1 \ldots \restriction a_i a_{i+1} \ldots \$) \vdash (q_{02}, \cent a_1 \ldots a_{i-1} C \restriction a_{i+1} \ldots a_n \$)$
Tým sa dostáva do počiatočného stavu automatu A_2 a spúšťa jeho simuláciu.

4. Opäť ukážeme, že A presne kopíruje postupnosť stavov a pohybov hlavy na slove $w_2 = a_{i+1} \ldots a_n$.

   - Nech hlava ukazuje na ľubovoľné miesto slova w_2, alebo na \$, t.j. ukazuje na ľubovoľný znak $x \in \Gamma_2$, alebo na \$. Potom vidno, že automat A vykoná to isté, čo vykoná automat A_2 $(\delta(q,x) = \delta_2(q,x))$.
   - Nech sa hlava nachádza na znaku C. Potom A vykoná to isté, čo vykoná automat na znaku ¢, pričom mu nedovolíme presunúť hlavu doľava alebo prepísať tento znak.

Záver : Automat A teda akceptuje práve jazyk $L = L_1 L_2$.

- Ak $w_1 \in L_1, w_2 \in L_2$, potom automat akceptuje slovo $w_1 w_2$, pretože simulácia A_1 prebehne úspešne a A sa dostane do stavu q_{f1} a následne prebehne simulácia A_2 a dostane sa do akceptačného stavu.

- Ak A akceptuje slovo w, tak toto patrí do jazyka L, pretože sa dá rozdeliť na dve časti w_1, w_2, pričom w_1 akceptuje automat A_1 a w_2 automat A_2.