Prezentácia z formálnych jazykov a automatov, Peter Kozej 2i2
Sada 2, úloha 2

Úloha: Pomocou LBA (lineárne ohraničených automatov) dokážte uzavretosť triedy kontextových jazykov na zreťazenie.

Riešenie: Máme teda dva lineárne ohraničené automaty A_1 a A_2 akceptujúce jazyky L_1 a L_2, našou úlohou je zostrojiť lineárne ohraničený automat A, ktorý bude akceptovať slová $w=w_1w_2$ kde $w_1 \in L_1$ a $w_2 \in L_2$.

$A_1=\{K_1,\Sigma_1,\Gamma_1,\delta_1,q_{01},F_1\}$
$A_2=\{K_2,\Sigma_2,\Gamma_2,\delta_2,q_{02},F_2\}$

$\mathbf{A}=\{K,\Sigma,\Gamma,K,\delta,q_0,F\}$
$\Sigma= \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
$\Gamma= \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup (\{\$,¢\} \times (\Gamma_1 \cup \Gamma_2))$
$K= K_1 \cup K_2 \cup \{q_0,q_1,q_2,q_3\}$ // predpokladá sa, že tieto množiny sú disjunktné
$F= F_2$

Popis práce automatu: Automat bude využívať metódu dvojstopej pásky a jeho prácu možno rozdeliť do nasledujúcich krokov:

1) Na začiatku automat prejde celým vstupným slovom, pričom nad niektorý znak (nedeterministicky sa rozhodne, nad ktorý) napíše 'falošný' $.
2) Vráti sa na začiatok vstupu a prenechá jeho spracovanie prvému automatu, ktorý však za koniec vstupu nebude považovať $ ale akékoľvek písmeno, nad ktorým je $ na druhej páske. V prípade, že automat 1 skončí v akceptačnom stave, pokračuje automat krokom 3)
3) Automat pokračuje čítaním vstupu smerom doprava až kým nenarazí na písmeno s 'falošným' dolárom. Tento vymaže a nad znak pred ním napíše 'falošný' cent a posunie čítaciu hlavu o krok doprava. Zvyšok vstupu spracuje druhý automat, ktorého delta-funkcia je však upravená tak, aby sa pri čítaní akéhokoľvek písmena s centom nad sebou správala ako pôvodná delta-funkcia pri prečítaní začiatku vstupu.
4) Automat akceptuje, ak aj druhý automat skončil v akceptačnom stave.

Popis delta-funkcie: (jej časti prislúchajúce jednotlivým krokom práce automatu)

1.) $\delta(q_0,a) = \{(q_0,a,1) , (q_1,(\$,a),0)\}$ $a \in \Sigma-\{\$\}$
2.) $\delta(q_1,a) = \{(q_1,a,-1)\}$ $a \in \Sigma -\{¢\}$
$\delta(q_1, ¢) = \{(q_{01}, ¢,1)\}$
$\delta(q,a) = \{(q`,a`,p) \mid (q`,a`,p) \in \delta_1(q,a)\}$ $a \neq \$$
$\delta(q,(\$,a)) = \{(q`,a`,p) \mid (q`,a`,p) \in \delta_1(q,\$)\}$
$\delta(q,a) = \{(q_2,a,0)\}$ $a \in \Gamma$, $q \in F_1$
3.) $\delta(q_2,a) = \{(q_2,a,1)\}$ $a \in \Gamma \wedge a \neq (\$,b)$
$\delta(q_2,(\$,a)) = \{(q_3,a,-1)\}$
$\delta(q_3,a) = \{(q_{02},(¢,a),1)\}$
$\delta(q,a) = \{(q`,a`,p) \mid (q`,a`,p) \in \delta_2(q,a)\}$ $a \neq ¢$
$\delta(q,(¢,a)) = \{(q`,a`,p) \mid (q`,a`,p) \in \delta_2(q, ¢)\}$

Dôkaz správnosti riešenia:

$L(A_1).L(A_2) \subseteq L(A)$: Máme slová $w_1=a_1a_2..a_m \in L(A_1)$ a $w_2=b_1b_2..b_n \in L(A_2)$ a k nim prislúchajúce akceptačné výpočty v automatoch A_1 a A_2: akceptačný výpočet pre w_1: $(q_{01},¢w_1\$,1) \vdash^* (q_{v1}, ¢w_{v1}\$, k_1)$

kde $q_{v1} \in F_1$, $w_{v1}=a_1`a_2`..a_m` \in \Gamma_1^*$ a k_1 je výsledná pozícia hlavy; a akceptačný výpočet pre w2: $(q_{02},¢w_2\$,1) \vdash^* (q_{v2}, ¢w_{v2}\$, k_2)$

kde $q_{v2} \in F_2$, $w_{v2}=b_1`b_2`..b_n` \in \Gamma_2^*$ a k_2 je výsledná pozícia hlavy.

Potrebujeme nájsť akceptačný výpočet pre w_1w_2 v automate A. Ten bude vyzerať nasledovne:

$(q_0,¢a_1..a_mb_1..b_n\$,1) \vdash^m (q_0,¢a_1..a_mb_1..b_n\$,m+1) \vdash (q_1,¢a_1..a_m(\$,b_1)b_2..b_n\$,m+1) \vdash^{m+1}$
$(q_1,¢a_1..a_m(\$,b_1)b_2..b_n\$,0) \vdash (q_{01},¢a_1..a_m(\$,b_1)b_2..b_n\$,1) \vdash^* (q_{v1},¢a_1`..a_m`(\$,b_1)b_2..b_n\$,k_1) \vdash$
$(q_2,¢a_1`..a_m`(\$,b_1)b_2..b_n\$,k_1) \vdash^* (q_{v1},¢a_1`..a_m`(\$,b_1)b_2..b_n\$,m+1) \vdash (q_3,¢a_1`..a_m`b_1b_2..b_n\$,m)$
$\vdash (q_{02},¢a_1`..a_{m-1}`(¢,a_m`)b_1b_2..b_n\$,m+1) \vdash^* (q_{v2},¢a_1`..a_{m-1}`(¢,a_m`)b_1`b_2`..b_n`\$,m+k_2)$

kde jednotlivé kroky výpočtu zodpovedajú bodom práce automatu, tak ako boli popísane vyššie- prvých m+1 krokov zodpovedá prvému bodu, ďalších m+2 krokov zodpovedá inicializácii druhého bodu, následný výpočet je akceptačný výpočet pre w_1 simulovaný na prvej časti slova, ďalšie kroky predstavujú bod 3- inicializáciu + akceptačný výpočet pre slovo w_2 z automatu A_2 simulovaný na druhej časti slova.

$L(A_1).L(A_2) \supseteq L(A)$: Majme akceptačný výpočet pre slovo $w=a_1..a_m$ v automate A, chceme z neho získať akceptačné výpočty pre slová $w_1=a_1..a_p, w_2=a_{p+1}..a_m$ v automatoch A_1, A_2.

Nech akceptačný výpočet vyzerá nasledovne: $(q_0,a_1..a_m,1) \vdash^* (q_v,a_1`..a_m`,k)$. V tomto výpočte možno nájsť niektoré význačné kroky a to:

1.) Zmenu stavu z q_0 na q_1 – zapísanie falošného \$.
   $(q_0,¢a_1..a_m\$,p+1) \vdash (q_1,¢a_1..a_p(\$,w_{p+1})..a_m\$,p+1)$
   Týmto bola určená konštanta p- rozdelenie slova w na podslová w_1 a w_2.
2.) Zmenu stavu z q_1 na q_{01}
   $(q_1,¢a_1..a_p(\$,a_{p+1})..a_m\$,0) \vdash (q_{01},¢a_1..a_p(\$,a_{p+1})..a_m\$,1)$
3.) Zmenu stavu z nejakého q_{v1} na q_2
   $(q_{v1},¢a_1`..a_p`(\$,a_{p+1})..a_m\$,k_1) \vdash (q_2,¢a_1`..a_p`(\$,a_{p+1})..a_m\$,k_1)$
4.) Zmenu stavu z q_3 na q_{02} – zapísanie falošného ¢
   $(q_3,¢a_1`..a_p`a_{p+1}..a_m\$,p) \vdash (q_{02},¢a_1`..(¢,a_p`)a_{p+1}..a_m\$,p+1)$
5.) Ukončenie výpočtu.

Nech výpočet medzi krokmi 2 a 3 vyzerá následovne:
$(q_{01},¢a_1..a_p(\$,a_{p+1})..a_m\$,1) \vdash^* (q_{v1},¢a_1`..a_p`(\$,a_{p+1})..a_m\$,k_1)$
Z toho ako je definovaná delta-funkcia vyplýva, že $q_{v1} \in F_1$ a teda akceptačný výpočet pre podslovo w1 v automate A1 získame z uvedeného výpočtu nahradením $(\$,a_{p+1})$ znakom \$ a odignorovaním zvyšku vstupu: $(q_{01},¢a_1..a_p\$,1) \vdash^* (q_{v1},¢a_1`..a_p`\$,k_1)$.
Ďalej, nech výpočet medzi krokmi 4 a 5 vyzerá následovne:
$(q_{02},¢a_1`..(¢,a_p`)a_{p+1}..a_m\$,p+1) \vdash^* (q_{v2},¢a_1`..(¢,a_p`)a_{p+1}`..a_m`\$,k_2)$
Z toho, že posledná konfigurácia predstavuje koniec akceptačného výpočtu v automate A vyplýva, že $q_{v2} \in F=F_2$. Podľa definície delta-funkcie vidíme, že akceptačný výpočet pre w_2 v automate A_2 získame z daného ´simulovaného´ výpočtu odignorovaním prvých p znakov zo vstupu (vrátane ¢) a nahradením ¢ za $(¢,a_p`)$: $(q_{02},¢a_{p+1}..a_m\$,p+1) \vdash^* (q_{v2},¢a_{p+1}`..a_m`\$,k_2)$.