Úloha 6.5:
Nech je dané n a n-tica neprázdnych slov X v abecede $\{a,b\}$, $X=(X_1,\ldots,X_n)$.
Uvažujme abecedu $\{a,b,\#,1,2,\ldots,n\}$.
Nech $L(X)=\{X_{i_1}\ldots X_{i_k}\#i_k\ldots i_1 | i_1,\ldots,i_k\in\{1,\ldots,n\},\ \ k\geq 0\}$.
Dokážte že $L(X)$ aj $L(X)^c$ sú bezkontextové. (Pozor: dokaz funguje len ak ziadne slovo X_i nie je prefixom ineho!)

1) $L(X)\in\mathcal{L}_{CF}$
Zostrojím zasobníkový automat A, ktorý akceptuje jazyk $L(X)$ prázdnou pamäťou nasledovne:
Zostrojím strom $T=(V,E,v)$, v je funkcia, ktorá každej hrane priradí písmeno z $\{a,b\}$.
- T bude vyzerať ako binárny vyhľadávací strom.
- Koreňom je stav q_0.
- Každý vrchol má najviac jedného syna s ktorým ho spája hrana h s $v(h)=a$ a jedného syna s hranou $v(h)=b$.
- Listami sú iba stavy X_i.
- Nech $X_i=a_{i1}a_{i2}\ldots a_{ik}\quad a_{ij}\in\{a,b\}$. Z každého listu X_i existuje jediná cesta do koreňa. Je to postupnosť vrcholov (stavov) $q_{i_1},\ldots,q_{i_k}$ pre ktoré platí: $\forall j\in\{1,\ldots,k-1\}\quad q_{i_j}q_{i_{j+1}}\in E\qquad v(q_{i_j}q_{i_{j+1}})=a_{ij}$.
- Cesty sa môžu prekrývať, ale iba na začiatku, t.j. ak sa smerom od koreňa rozdelia už sa nemôžu znovu spojiť.
$A=\{K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,F\}$
$\Sigma=\{a,b,\#,1,\ldots,n\}$
$\Gamma=\{1,\ldots,n,Z_0\}$
$F=\{\}$
$K=\{q_c\}\cup\{q|q\in V\}$
$\forall q_i,q_j\in V$: Ak $q_iq_j\in E$ a $v(q_iq_j)=x$
potom $\delta(q_i,x,Z)=\{(q_j,Z)\}\qquad\forall Z\in\{1,\ldots,n\}$
1. $\delta(X_i,\epsilon,Z)=\{(q_0,i)\}\qquad\forall i,Z\in\{1,\ldots,n\}$
2. $\delta(q_0,\#,Z)=\{(q_c,Z)\}$
3. $\delta(q_c,i,i)=\{(q_c,\epsilon)\}$
4. $\delta(q_c,\epsilon,Z_0)=\{(q_F,\epsilon)\}$

$L(X)\subseteq N(A)$
Dokážem, že pre automat platí

$$(q_0,X_{i_1}\ldots X_{i_k}\#i_k\ldots i_1z,Z)\overset{*}{\to}(q_c,z,Z)\quad\forall z\in\Sigma^*,Z\in\Gamma^*$$

Indukciou:
1^o: $k=1\quad(q_0,\#z,Z)\to(q_c,z,Z)$ podla pravidla 2.
2^o: nech plati pre $k\geq 0$

$$(q_0,X_{i_1}\ldots X_{i_{k+1}}\#i_{k+1}\ldots i_1z,Z)\to$$

pozdĺž príslušnej vetvy v T príde do stavu X_{i_1}, potom pravidlo 1.

$$\to(q_0,X_{i_2}\ldots X_{i_{k+1}}\#i_{k+1}\ldots i_2i_1z,Zi_1)\to$$

$$\overset{\text{IP}}{\to} (q_c, i_1 z, Z i_1) \overset{3.}{\to} (q_c, z, Z)$$

Teda platí aj pre k+1.

Preto ak automat začne v konfigurácii $(q_0, X_{i_1} \dots X_{i_n} \# i_n \dots i_1, Z_0)$ dostane sa do (q_c, ϵ, Z_0) odkiaľ môže prejsť do $(q_F, \epsilon, \epsilon)$ kde akceptuje.

$N(A) \subseteq L(X)$
$(q_F, \epsilon, \epsilon) \leftarrow$
1) Vyhodiť zo zásobníka Z_0 mohol automat len zo stavu q_c pravidlom 4.
$(q_c, \epsilon, Z_0) \leftarrow$
2) Obsah zásobníka sa musel zhodovať so vstupom (prav. 3.)
$(q_c, i_1, Z_0 i_1) \leftarrow$
$(q_c, i_k \dots i_1, Z_0 i_1 \dots i_k) \leftarrow$
3) Do stavu q_c sa mohol dostať len cez # z q_0 (prav. 2.)
$(q_0, \# i_k \dots i_1, Z_0 i_1 \dots i_k) \leftarrow$
4) Do zásobníka sa muselo dostať to, čo v bode 2) bude vyhadzovať. To sa dá len v stavoch X_i (prav. 1.), takže musel načítať príslušné bloky znakov (X_i).
$(q_0, X_{i_k} \# i_k \dots i_1, Z_0 i_1 \dots i_{k-1}) \leftarrow$
$(q_0, X_{i_2} \dots X_{i_k} \# i_k \dots i_1, Z_0 i_1) \leftarrow$
$(q_0, X_{i_1} \dots X_{i_k} \# i_k \dots i_1, Z_0)$

2) $L(X)^c \in \mathcal{L}_{CF}$
$L(X) \in \mathcal{L}_{DPCF} \subset \mathcal{L}_{DCF} \subseteq \mathcal{L}_{CF}$
1) $|\delta(q, a, Z)| \leq 1 \qquad \forall q, a, Z$
2) $|\delta(q, \epsilon, Z)| \leq 1$
3) ak $|\delta(q, \epsilon, Z)| \geq 0$ potom $|\delta(q, a, Z)| = 0$ Trieda $\mathcal{L}_{DCF}$ je uzavretá na komplement $\Rightarrow L(X)^c \in \mathcal{L}_{DCF} \subseteq \mathcal{L}_{CF}$.