Zadanie:

a) Pre daný TS A nájdite bezkontextové jazyky L_{A_1} a L_{A_2} také, že pre jazyk platných výpočtov stroja A platí: $L_{PV(A)} = L_{A_1} \cap L_{A_2}$.
b) S využitím $L_{PV(A)}$ dokážte, že problém prázdnosti prieniku bezkontextových jazykov je nerozhodnuteľný.
c) S využitím $L_{PV(A)}$ dokážte, že problém či je bezkontextový jazyk rovný Σ^* je nerozhodnuteľný.

Riešenie a):

Najprv zavediem niektoré veci, ktoré budú použité v celom riešení. Nech $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ je daný TS. Kvôli jednoduchosti predpokladajme, že konfigurácie TS A sú v tvare:

$$a_0\, a_1 \ldots (a_i, q)\, a_{i+1} \ldots a_m$$

kde $a_k \in \Gamma$, $(a_i, q) \in \Gamma \times K$, q je aktuálny stav, i je pozícia hlavy. Ďalej predpokladajme, že množiny stavov TS a jeho pracovnej abecedy sú disjunktné.

$L_{PV(A)} := \{ w_1\#w_2^R\#\ldots\#w_n^{R^{(n+1) \bmod 2}} \mid \forall i$: w_i je konfigurácia TS A; $w_i \vdash w_{i+1}$; w_1 je počiatočná, w_n je akceptačná $\}$

Teraz ešte dokážem pomocné tvrdenie:

Tvrdenie 1: Jazyk $L = \{ u\#v^R \mid u, v$ sú konfigurácie daného TS také, že $u \vdash v \}$ je bezkontextový.

Dôkaz: Ako vieme, jazyk $L' = \{ w\#w^R \mid w$ je konfigurácia TS $\}$ je bezkontextový. Keďže L_{CF} je uzavretá na preklad, stačí zostrojiť A-prekladač M, ktorý jazyk L' pretransformuje na jazyk L.

$M = (K_M, \Sigma_1, \Sigma_2, H, q_{M0}, F_M)$
$K_M = \{q_{M0}, q_{MF}\} \cup \{q_a \mid a \in \Gamma \cup \{\$, ¢, \varepsilon\}\} \cup \{q_p \mid p \in K\}$
$\Sigma_1 = \Gamma \cup (\Gamma \times K)$
$\Sigma_2 = \Sigma_1$
$F_M = \{q_{MF}\}$

Transformáciu zadefinujem nasledovne:

$H(q_{M0}, ¢) = (q_{M0}, ¢)$	prepíš počiatočný cent
$H(q_{M0}, a) = (q_{M0}, a) \quad \forall a \neq \{\#\}$	kým nie je #, iba prepisuj
$H(q_{M0}, \#) = (q_\varepsilon, \#)$	#-ku vypíš, zapamätaj si nič, t.j. ε
$H(q_a, b) = (q_b, a) \quad \forall a, b \in \Gamma \cup \{\$, ¢, \varepsilon\}$	zapíš zapamätané a, zapamätaj nové b
$H(q_a, (b, q)) = \{(q_c, (a, p)) \mid (p, c, -1) \in \delta(q, b)\} \cup$	M je na pozícii hlavy, A robil krok vľavo
$\cup \{(q_\varepsilon, a(c, p)) \mid (p, c, 0) \in \delta(q, b)\} \cup$	M je na pozícii hlavy, A stojí na mieste
$\cup \{(q_p, ac) \mid (p, c, 1) \in \delta(q, b)\}$	M je na pozícii hlavy, A robil krok vpravo
$H(q_p, b) = (q_\varepsilon, (b, p))$	vypíš zapamätaný stav a prečítaný symbol
$H(q_a, \$) = (q_{MF}, a\$)$	skonči

A-prekladač M simuluje jeden krok TS, keď narazí na pozíciu hlavy. V indexe stavu si A-prekladač pamätá posledne prečítaný symbol, aby v prípade, že TS šiel vlavo, vedel toto zabezbečiť. Z konštrukcie vyplýva, že $H(L') = L$, a teda aj jazyk L je bezkontextový. ♠

Teraz sa môžem zaoberať jazykmy L_{A_1} a L_{A_2}. Zoberme:

$L_{A_1} = \{ w_i\#w_{i+1}^R \mid i = 2k+1, \forall i$: w_i, w_{i+1} sú konfigurácie TS A, $w_i \vdash w_{i+1} \}$

$L_{A_2} = \{ w_i^R\#w_{i+1} \mid i = 2k, \forall i$: w_i, w_{i+1} sú konfigurácie TS A, $w_i \vdash w_{i+1} \}$

Slovom povedané L_{A_1} kontroluje nadväznosť $w_i \vdash w_{i+1}$ pre i nepárne, L_{A_2} pre párne.

Z tvrdenia 1. vyplýva, že L_{A_1} a L_{A_2} sú bezkontextové jazyky a tiež je zrejmé, že $L_{A_1} \cap L_{A_2}$ je nejaký výpočet TS A. Aby to bol naozaj platný výpočet (teda aby platilo $L_{PV(A)} = L_{A_1} \cap L_{A_2}$), musím ešte skontrolovať či w_1 je platná počiatočná konfigurácia a w_n je akceptačná. Toto zabezpečím pomocou jazyka L_{A_1}. Pre realizáciu jazykov L_{A_1} a L_{A_2} budem používať zásobníkové automaty A_1 a A_2.

$A_1 = (K_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_{10}, Z_{10}, F_1)$
$K_1 = \{q_{10}, q_{11}, q_1^F{}_1, q_{12}, q_{13}, q_1^F{}_3, q_{14}, q_{15}, q_1^F{}_5, q_{1F}\} \cup$
$\cup \{q_{1p} \mid p \in K\} \cup \{q_{1(a,(d,p))} \mid (a, (d, p)) \in (\Gamma \times (\Gamma \times K))\}$
$\Sigma_1 = \Gamma \cup (\Gamma \times K)$
$\Gamma_1 = \{Z_{10}\} \cup \Sigma_1$
$F_1 = \{q_{1F}\}$

δ-funkciu zadefinujem nasledovne (vždy budú $\forall z \in \Sigma$; $\forall a, c, d \in \Gamma$; $a, z \neq \#$; $\forall b \in \Gamma_1$):

$\delta_1(q_{1\,0}, (z, q_0), Z_{1\,0}) = (q_{1\,1}, Z_{1\,0}\,(z, q_0))$	$q_0 \notin F$	kontola či je hlava na začiatku vstupu …
$\delta_1(q_{1\,0}, (z, q_0), Z_{1\,0}) = (q_1^{\,F}{}_1, Z_{1\,0}\,(z, q_0))$	$q_0 \in F$	a TS je v počiatočnom stave
$\delta_1(q_{1\,0}, (\mathrm{B}, q_0), Z_{1\,0}) = (q_{1\,\mathrm{F}}, Z_{1\,0})$	$q_0 \in F$	ak TS akceptuje prázdny vstup, končím
$\delta_1(q_{1\,1}, z, b) = (q_{1\,1}, bz)$		ostatné znaky dám do zásobníka
$\delta_1(q_{1\,1}, \#, b) = (q_{1\,2}, b)$		ak som dočítal, idem kontrolovať
$\delta_1(q_1^{\,F}{}_1, z, b) = (q_1^{\,F}{}_1, bz)$		tak isto dočítam konfiguráciu, ale …
$\delta_1(q_1^{\,F}{}_1, \#, b) = (q_{1\,2}, b)$		keď ešte je ďalšia, tak pokračujem
$\delta_1(q_1^{\,F}{}_1, \varepsilon, b) = (q_{1\,\mathrm{F}}, b)$		keď nie a TS bol v akceptačnom stave, končím
$\delta_1(q_{1\,2}, a, a) = (q_{1\,2}, \varepsilon)$		kontrola nezmenených znakov
$\delta_1(q_{1\,2}, (a, q), (d, p)) = (q_{1\,3}, \varepsilon)$	$(q, a, 0) \in \delta(p, d), q \in K \setminus F$	hlava zostala v tomto kroku výpočtu …
$\delta_1(q_{1\,2}, (a, q), (d, p)) = (q_1^{\,F}{}_3, \varepsilon)$	$(q, a, 0) \in \delta(p, d), q \in F$	na mieste
$\delta_1(q_{1\,2}, (a, q), a) = (q_{1\,q}, \varepsilon)$		hlava sa posunula vpravo
$\delta_1(q_{1\,2}, a, (d, p)) = (q_{1\,(a,(d,p))}, \varepsilon)$		hlava sa posunula vľavo
$\delta_1(q_{1\,q}, a, (d, p)) = (q_{1\,3}, \varepsilon)$	$(q, a, 1) \in \delta(p, d), q \in K \setminus F$	hlava vpravo, nie je akceptačný stav
$\delta_1(q_{1\,q}, a, (d, p)) = (q_1^{\,F}{}_3, \varepsilon)$	$(q, a, 1) \in \delta(p, d), q \in F$	hlava vpravo, je akceptačný stav
$\delta_1(q_{1\,(a,(d,p))}, (c, q), c) = (q_{1\,3}, \varepsilon)$	$(q, a, -1) \in \delta(p, d), q \in K \setminus F$	hlava vľavo, nie je akceptačný stav
$\delta_1(q_{1\,(a,(d,p))}, (c, q), c) = (q_1^{\,F}{}_3, \varepsilon)$	$(q, a, -1) \in \delta(p, d), q \in F$	hlava vľavo, je akceptačný stav
$\delta_1(q_{1\,3}, a, a) = (q_{1\,3}, \varepsilon)$		kontrola ostatných nezmenených znakov
$\delta_1(q_{1\,3}, \#, Z_{1\,0}) = (q_{1\,4}, Z_{1\,0})$		ak som dočítal, idem na ďalšiu konfiguráciu
$\delta_1(q_1^{\,F}{}_3, a, a) = (q_1^{\,F}{}_3, \varepsilon)$		tak isto kontrola ostatných nezmenených znakov
$\delta_1(q_1^{\,F}{}_3, \#, Z_{1\,0}) = (q_{1\,4}, Z_{1\,0})$		ak je ďalšia konfigurácia, idem na to
$\delta_1(q_1^{\,F}{}_3, \varepsilon, Z_{1\,0}) = (q_{1\,\mathrm{F}}, Z_{1\,0})$		keď nie a TS bol v akceptačnom stave, končím
$\delta_1(q_{1\,4}, a, b) = (q_{1\,4}, ba)$		znaky dávam do zásobníka
$\delta_1(q_{1\,4}, (a, q), b) = (q_{1\,5}, b\,(a, q))$	$q \in K \setminus F$	našiel som halvu, nie sme v akceptačnom stave
$\delta_1(q_{1\,4}, (a, q), b) = (q_1^{\,F}{}_5, b\,(a, q))$	$q \in F$	našiel som halvu, sme v akceptačnom stave
$\delta_1(q_{1\,5}, a, b) = (q_{1\,5}, ba)$		ostatné znaky dám tiež do zásobníka
$\delta_1(q_{1\,5}, \#, b) = (q_{1\,2}, b)$		ak som dočítal, idem kontrolovať
$\delta_1(q_1^{\,F}{}_5, a, b) = (q_1^{\,F}{}_5, ba)$		tak isto dočítam konfiguráciu, ale …
$\delta_1(q_1^{\,F}{}_5, \#, b) = (q_{1\,2}, b)$		keď ešte je ďalšia, tak pokračujem
$\delta_1(q_1^{\,F}{}_5, \varepsilon, b) = (q_{1\,\mathrm{F}}, b)$		keď nie a TS bol v akceptačnom stave, končím

Práca automatu je jednoduchá. Na začiatku sa najpr pozrie, či je vstupná konfigurácia w_1 platná. Potom nepárne konfigurácie dá do zásobníka a porovná to s príslušnou párnou konfiguráciou (presnejšie jej reverzom). Pritom pomocou dolných indexov skontorluje pohyb hlavy a či to bol platný krok. A počas celej práce automat keď nájde halvu TS, zapamätá si, či je v akceptačnom stave (na to sa používa horný index ^{F}). Takto keď skončil reťazec konfigurácií TS, vie povedať či posledná bola akceptačná.

Automat A_2 sa robí podobne ako A_1, iba že už nemusím kontrolovať či je w_1 platná počiatočná konfigurácia a w_n akceptačná.

$A_2 = (K_2, \Sigma_2, \Gamma_2, \delta_2, q_{2\,0}, Z_{2\,0}, F_2)$
$K_2 = \{q_{2\,0}, q_{2\,2}, q_{2\,3}, q_{2\,4}, q_{2\,5}, q_{2\,\mathrm{F}}\} \cup \{q_{2\,p} \mid p \in K\} \cup \{q_{2\,(a,(d,p))} \mid (a, (d, p)) \in (\Gamma \times (\Gamma \times K))\}$
$\Sigma_2 = \Gamma \cup (\Gamma \times K)$
$\Gamma_2 = \{Z_{2\,0}\} \cup \Sigma_2$
$F_2 = \{q_{2\,\mathrm{F}}\}$

δ-funkciu zadefinujem nasledovne (vždy budú $\forall a, c, d \in \Gamma; a \neq \#; \forall b \in \Gamma_2$):

$\delta_2(q_{2\,0}, a, Z_{2\,0}) = (q_{2\,0}, Z_{2\,0})$		preskočím prvú konfiguráciu w_1
$\delta_2(q_{2\,0}, \#, Z_{2\,0}) = (q_{2\,4}, Z_{2\,0})$		idem na prvú párnu
$\delta_2(q_{2\,0}, \varepsilon, Z_{2\,0}) = (q_{2\,F}, Z_{2\,0})$		došiel vstup (bola iba 1 kofigurácia), končím
$\delta_2(q_{2\,2}, a, a) = (q_{2\,2}, \varepsilon)$		kontrola nezmenených znakov
$\delta_2(q_{2\,2}, (a, q), (d, p)) = (q_{2\,3}, \varepsilon)$	$(q, a, 0) \in \delta(p, d)$	hlava zostala v tomto kroku výpočtu na mieste
$\delta_2(q_{2\,2}, (a, q), a) = (q_{2\,q}, \varepsilon)$		hlava sa posunula vľavo
$\delta_2(q_{2\,2}, a, (d, p)) = (q_{2\,(a,(d,p))}, \varepsilon)$		hlava sa posunula vpravo
$\delta_2(q_{2\,q}, a, (d, p)) = (q_{2\,3}, \varepsilon)$	$(q, a, -1) \in \delta(p, d)$	hlava vľavo, je správne
$\delta_2(q_{2\,(a,(d,p))}, (c, q), c) = (q_{2\,3}, \varepsilon)$	$(q, a, 1) \in \delta(p, d)$	hlava vpravo, je správne
$\delta_2(q_{2\,3}, a, a) = (q_{2\,3}, \varepsilon)$		kontrola ostatných nezmenených znakov
$\delta_2(q_{2\,3}, \#, Z_{2\,0}) = (q_{2\,4}, Z_{2\,0})$		ak som dočítal, idem na ďalšiu konfiguráciu
$\delta_2(q_{2\,3}, \varepsilon, Z_{2\,0}) = (q_{2\,F}, Z_{2\,0})$		došiel vstup, končím
$\delta_2(q_{2\,4}, a, b) = (q_{2\,4}, ba)$		znaky dávam do zásobníka
$\delta_2(q_{2\,4}, (a, q), b) = (q_{2\,5}, b\,(a, q))$		našiel som halvu
$\delta_2(q_{2\,5}, a, b) = (q_{2\,5}, ba)$		ostatné znaky dám tiež do zásobníka
$\delta_2(q_{2\,5}, \#, b) = (q_{2\,2}, b)$		ak som dočítal, idem kontrolovať
$\delta_2(q_{2\,5}, \varepsilon, b) = (q_{2\,F}, b)$		došiel vstup, končím

Z konštrukcie automatov je zrejmé, že $L(A_1) = L_{A_1}$ a $L(A_2) = L_{A_2}$. Teda hladané bezkontextové jazyky pre daný TS A sú L_{A_1} a L_{A_2}.

Riešenie b):

Z časti a) už vieme, že pre daný TS A existujú bezkontextové jazyky L_{A_1} a L_{A_2} také, že pre jazyk platných výpočtov stroja A platí: $L_{PV(A)} = L_{A_1} \cap L_{A_2}$.
Tak najprv zase príde pomocné tvrdenie:

Tvrdenie 2: Pre daný TS A platí: $L(A) = \varnothing$ práve vtedy, keď $L_{PV(A)} = \varnothing$.
Dôkaz:

"$\Rightarrow$": Je zrejmé, že ak stroj neakceptuje žiadne slovo, tak neexistuje ani platný výpočet.
"$\Leftarrow$": A tiež vidno, že ak neexistuje platný výpočet z počiatočnej do akceptačnej konfigurácii, tak stroj nemôže akceptovať žiadne slovo. ♠

Z tvrdenia 2. vyplýva, že keď je nerozhodnuteľné určiť pre daný TS A, či $L(A) = \varnothing$, potom je nerozhodnuteľné určiť, či $L_{PV(A)} = \varnothing$. A keďže $L_{PV(A)} = \varnothing \Leftrightarrow L_{A_1} \cap L_{A_2} = \varnothing$, potom je nerozhodnuteľné určiť, či prienik bezkontextových jazykov L_{A_1} a L_{A_2} je prázdny.

Riešenie c):

Jazyk neplatných výpočtov stroja A je:
$L_{NPV(A)} := L^{c}_{PV(A)}$, a $L_{NPV(A)}$ patrí do triedy bezkontextových jazykov.

Z definície $L_{NPV(A)}$ priamo vyplýva, že $L_{NPV(A)} = \Sigma^*$ práve vtedy, keď $L_{PV(A)} = \varnothing$. Ako už bolo v časti b) odôvodnené, $L_{PV(A)} = \varnothing$ je nerozhodnuteľný, teda aj $L_{NPV(A)} = \Sigma^*$ je nerozhodnuteľný. Keďže $L_{NPV(A)} \in L_{CF}$, tak vidno že problém či je bezkontextový jazyk rovný Σ^* je nerozhodnuteľný.