Štefan Dobiš, 2i1

Úloha 3

Zadanie Nech L je regulárny jazyk. Pomocou nedeterministických dvojsmerných konečných automatov dokážte, že jazyk $L' = \{uv \mid \exists w \in \Sigma^* : uvw \in L, |u| = |w| = |v|\}$ je regulárny.

Definícia 1 *Nedeterministický dvojsmerný konečný automat (NDKA) je 5-tica* $A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$, *£ (začiatok pásky), \$ (koniec pásky)* $\notin \Sigma$, *kde*

K - *množina stavov*
Σ - *množina symbolov*
$\delta : K \times (\Sigma \cup \{£, \$\}) \to 2^{K \times \{-1,0,1\}}$ - *prechodová funkcia*
$F \subseteq K$ - *množina akceptačných stavov*

Definícia 2 *Konfigurácia NDKA je dvojica* $K \times £\Sigma^* \lceil \Sigma^* \$ \quad \cup \quad K \times \lceil £\Sigma^* \$$

Definícia 3 *Krok výpočtu NDKA je relácia* $\vdash$ *na konfiguráciach NDKA definovaná nasledovne:*
$(q, £u\lceil av\$ \vdash (p, £u\lceil av\$)$ *ak* $(p, 0) \in \delta(q, a)$
$(q, £u\lceil av\$ \vdash (p, £ua\lceil v\$)$ *ak* $(p, 1) \in \delta(q, a)$
$(q, £ub\lceil av\$ \vdash (p, £u\lceil bav\$)$ *ak* $(p, -1) \in \delta(q, a)$

Definícia 4 *Jazyk akceptovaný NDKA je* $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, £\lceil w\$) \vdash (q, £w\lceil \$),\ q \in F\}$

Veta 1 *Trieda jazykov akceptovaná NDKA je trieda regulárnych jazykov (R)*

Konštrukcia

Podľa vety 1 pre jazyk L existuje NDKA ktorý tento jazyk akceptuje ($L = L(A)$).
$A = (K, \Sigma, \delta, q_0, F)$
$K = \{q_0, \ldots, q_n\}$
$F = \{q_{k_1}, \ldots, q_{k_l} \mid k_1, \ldots, k_l \in \{0, \ldots, n\} \wedge 0 \leq l \leq n\}$

Zostrojíme NDKA A', ktorý bude akceptovať jazyk L' ($L' = L(A')$).
$A' = (K', \Sigma, \delta', q_{1,0}, F')$
$K' = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup \{q_F\}$
$Q_1 = \{q_{1,0}, \ldots, q_{1,n}\}$ - stavy pre výpočet slova uv
$Q_2 = \{q_{2,0}, \ldots, q_{2,n}\}$ - stavy pre simulovanie výpočtu w v A
$Q_3 = \{q_{3,0}, \ldots, q_{3,n}\}$ - stavy pre posun hlavy
$F' = \{q_F\}$

(simulovanie výpočtu A)
$\delta'(q_{1,i}, z) = \{(q_{1,j}, 1)\}$ ak $q_j \in \delta(q_i, z),\ z \in \Sigma\ \ (0 \leq i, j \leq n)$

(1x)
$\delta'(q_{1,i}, \$) = \{(q_{2,i}, -1)\}$

(←)
$\delta'(q_F, z) = \{(q_F, 1)\}, z \in \Sigma$
$\delta'(q_{3,i}, z) = \{(q_{2,i}, -1)\}, z \in \Sigma$
$\delta'(q_{2,i}, z_2) = \{(q_{3,j}, -1)\}$ ak $q_j \in \delta(q_i, z_1),\ z_1, z_2 \in \Sigma$

(akceptovanie a presun hlavy na koniec pásky)
$\delta'(q_{2,i}, £) = \{(q_F, 1)\}$ ak $q_i \in F$

Štefan Dobiš, 2i1

Dôkaz 1

Overenie správnosti konštrukcie automatu A' t.j. $L' = L(A')$.

1, $L' \subseteq L(A')$

Ukážeme, že pre slovo z L' vieme nájsť akceptačný výpočet automatu A'.
$uv \in L' \Rightarrow uv \in L(A')$

Ak $uv \in L' \Rightarrow \exists w \in \Sigma^*; uvw \in L(A)$ pričom $|uv| = 2k,\ k \in \mathbf{N}$
pretože $|u| = |v| = |w| = k$ a $|uvw| = 3k,\ k \in \mathbf{N}$.

Ak $uvw \in L(A)$ potom existuje akceptačný výpočet v A taký, že:
$(q_0, uvw) \vdash_A^* (q_i, w) \vdash_A^* (q_j, \varepsilon),\ q_j \in F$

$uv = u_1 \dots u_k v_1 \dots v_k$

Výpočet A' potom vyzerá nasledovne:

$$
\begin{array}{ll}
 & (q_{1,0}, £\lceil uv\$) \quad \vdash_{A'}^* \\
\vdash_{A'}^* & (q_{1,i}, £uv\lceil\$) = (q_{1,i}, £u_1 \dots u_k v_1 \dots v_k\lceil\$) \quad \vdash_{A'} \\
\vdash_{A'} & (q_{2,i}, £u_1 \dots u_k v_1 \dots v_{k-1}\lceil v_k\$) \quad \vdash_{A'} \\
\vdash_{A'} & (q_{3,j}, £u_1 \dots u_k v_1 \dots v_{k-2}\lceil v_{k-1} v_k\$) \quad \vdash_{A'} \\
\vdash_{A'} & (q_{2,j}, £u_1 \dots u_k v_1 \dots v_{k-3}\lceil v_{k-2}\ v_{k-1} v_k\$) \quad \vdash_{A'}^* \\
 & \vdots \\
\vdash_{A'}^* & (q_{3,m}, £\lceil u_1 \dots u_k v_1 \dots v_k\$) \quad \vdash_{A'} \\
\vdash_{A'} & (q_{2,m}, \lceil £u_1 \dots u_k v_1 \dots v_k\$) \quad \vdash_{A'} \\
\vdash_{A'} & (q_F, \lceil £u_1 \dots u_k v_1 \dots v_k\$) \quad \vdash_{A'}^* \\
\vdash_{A'}^* & (q_F, £u_1 \dots u_k v_1 \dots v_k\lceil\$)
\end{array}
$$

2, $L(A') \subseteq L'$

Chceme ukázať že ak existuje akceptačný výpočet slova v A', potom slovo patrído L'.
Akceptačný výpočet musí obsahovať konfiguráciu $(q_{1,i}, £uv\lceil\$)$.
Takže nech $(q_{1,0}, \lceil £uv\$) \vdash_{A'}^* (q_{i,1}, £uv\lceil\$)$.
Z konštrukcie δ' funkcie vieme, že v automate A musíexistovať výpočet $(q_0, uvw) \vdash_A^* (qi, w)$.
Ďalej δ' funkcia nedeterministicky hľadá slovo w.
$|u| = |v| = |w| = k|uv| = 2k|w| = k$
Simulácia w prebieha na stavoch Q_3 a Q_2 $(q_{3,i}, q_{2,i})$, pričom sa hlava posunie o $2k$ krokov smerom k začiatku pásky.
$\delta'(q_{2,i}, £) = \{(q_F, 1)\}$ ak $q_i \in F$
Ak sa výpočet dostal do stavu q_F, hľadané w sme našli.
Potom $\delta'(q_F, z) = \{(q_F, 1)\}, z \in \Sigma$ čím výpočet skončív konfigurácii $(q_F, £uv\lceil\$)$.

Dôkaz 2

Našli sme NDKA pre jazyk L'.
Jazyk L' je regulárny na základe *vety 1.* **Q.E.D.**