*Uloha*3.1

Dokazte ekvivalenciu Chomskeho definicie a standardnej definicie kontextovych gramatik (CSG).

Pre CSG s mnozinou terminalov T a mnozinou neterminalov N

<u>Chomskeho definicia</u> je, ze pravidla CSG maju tvar

$u\alpha v \rightarrow u\beta v$, kde u,v,$\beta \in$ (N $\cup$ T)*, $\alpha \in$ N, $\beta \in$ (N $\cup$ T)$^+$

<u>Standardna definicia</u> je, ze pravidla CSG maju tvar

u $\rightarrow$ v, kde u,v $\in$ (N $\cup$ T)$^+$ a zaroven |u| $\leq$|v|

Tibor Bajzik 2i1

Vytvorime gramatiku G" taku, ze L(G) = L(G") tak, ze :
T" = T
N" = N $\cup \{\xi_a \mid a \in T\}$
σ" = σ
P" = $\{\xi_a \to a \mid a \in T''\} \cup$
$\{u \to v \mid (u, v \in (N'')^*)(\exists (u' \to v') \in P)$
$(u_i = u'_i \vee u_i = \xi_{u'_i})(v_i = v'_i \vee v_i = \xi_{v'_i})\}$

Dokaz, ze L(G)=L(G")

L(G)$\subseteq$L(G") : Majme odvodenie slova w $\in$ L(G) σ=$w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n$=w. Pre toto odvodenie v G vytvorime identicke odvodenie v G" σ"=$w''_0 \Rightarrow w''_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w''_n$=w"(pricom pravidlo pouzite pri kroku $w''_i \Rightarrow w''_{i+1}$ je to pravidlo, ktore sme pri definicii P" dostali z pravidla pouziteho pri kroku $w_i \Rightarrow w_{i+1}$)

Vsetky pravidla v P" pouzivaju namiesto terminalov a neterminaly ξ_a. Teda vetna forma w" = $\xi_{U_1}\xi_{U_2}\ldots\xi_{U_m}$ prave vtedy ked w = $U_1U_2\ldots U_m \quad \forall i U_i \in T$

Z vetnej formy w" odvodime slovo w uz len pomocou pravidiel $\xi_a \to a$
w"=$\xi_{U_1}\xi_{U_2}\ldots\xi U_m \Rightarrow U_1\xi_{U_2}\ldots\xi_{U_m} \Rightarrow U_1U_2\xi_{U_3}\ldots\xi_{U_m} \Rightarrow \ldots \Rightarrow U_1U_2\ldots U_m$

w $\in$ L(G")

L(G)$\supseteq$L(G") : Kedze ziaden neterminal nie je na lavej strane nejakeho pravidla mozeme pre kazde w"$\in$L(G") vytvorit odvodenie w=$w_0 \Rightarrow w_{11}'' \Rightarrow \ldots \Rightarrow w''_n \Rightarrow w''_{n+1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow w''_{n+k}$=w" pricom kroky odvodenia $w_i \Rightarrow w_i + 1$ pre i<n nepouzivaju pravidla $\xi_a \to a$ a pre i$\geq$n pouzivaju len pravidla $\xi_a \to a$ (terminaly sa vytvoria az nakonci)

Nech w"=$U_1U_2\ldots U_m$ Dalej vieme, ze kazde U_i vzniklo z odvodenia pomocou pravidla $\xi_{U_i} \to U_i$. Kedze kazdy takyto krok je len na konci odvodenia slova w" tak vieme, ze vetna forma w''_n mala tvar $\xi_{U_1}\xi_{U_2}\ldots\xi_{U_m}$.(pretoze z w_n" sa odvodzuje uz len pomocou pravidiel $\xi_a \to a$ tak jedina moznost dalsich krokov odvodenia je $w_n \Rightarrow U_1\ldots U_m$)

Podobne (opacnym sposobom) ako v predchadzajucej casti dokazu vytvorime odvodenie vetnej formy w ku vetnej forme w''_n kedze vetna forma w''_n obsahuje len neterminaly tvaru ξ_a bude vetna forma w obsahovat len terminaly. Kedze pravidla $\xi_a \to a$ nemozu zmenit postavenie neterminalov(terminalov) tak vieme, ze slovo w = w".

w"$\in$L(G)

Teraz vytovrime gramtiku G' taku, ze L(G') = L(G")

T' = T"

N' = N"$\cup\{\alpha_{p,q} \mid (\alpha \in N'')((p \to q) \in P'')(\exists x \in (N'')^+)(q = \alpha x)\}$

$\cup\{\dot{\omega}_{p,q} \mid (\omega \in N'')((p \to q) \in P'')(\exists x \in (N'')^+)(p = x\omega)\}$

σ' = σ"

P' = $\{\xi_a \to a \mid a \in T'\}$

$\cup \{p \to q \mid (p \in N'')(q \in (N'')^+)((p \to q) \in P'')\}$

$\cup \{\beta v \to \alpha_{p,q} v \mid (|v| > 1)(p = \beta v)(\exists u \in (N'')^+)(q = \alpha u)\}$

$\cup \{\alpha_{p,q} v\omega \to \alpha_{p,q} v\dot{\omega}_{p,q} \mid (\exists \alpha' \in N'')(\exists u \in (N'')^+)(p = \alpha' v\omega)(q = \alpha u)\}$

$\cup \{\alpha_{p,q} u\beta v\dot{\omega}_{p,q} \to \alpha_{p,q} u\gamma v\dot{\omega}_{p,q} \mid (\exists u', v' \in (N'')^*)(|u| = |u'|)(\exists \alpha' \in N'')$
$(p = \alpha' u'\beta v\omega)(q = \alpha u\gamma v')\}$

$\cup \{\alpha_{p,q} v\dot{\omega}_{p,q} \to \alpha v\dot{\omega}_{p,q} \mid (\exists u \in (N'')^+)(q = \alpha vu)\}$

$\cup \{u\dot{\omega}_{p,q} \to uv \mid q = uv\}$

Lema 1 : Kazdy krok odvodenia v G" sa da nahradit krokmi odvodenia v G'.

Dokaz : nech w_{i+1} je vetna forma odvodena na jeden krok z vetnej formy w_i v gramatike G". w_i je vetna forma aj v gramatike G' pretoze N"⊆N' a T"=T'. Pravidlo pri odvodzovani w_{i+1} ma tvar :

a. $\xi_a \to a$

ale toto pravidlo je obsiahnute v P' teda w_{i+1} vieme odvodit z w_i aj v gramatike G'.

b. $u \to v$ $u \in N''$ $v \in (N'')^+$

To iste ako pripad a. pretoze aj toto pravidlo mame.

c. $u \to v$ $u, v \in (N''(N'')^+)$

Nech u = $U_1U_2 \dots U_n$ pricom $\forall i$ $U_i \in N''$ a tiez v = $V_1V_2 \dots V_n$ pricom $\forall i < n$ $V_i \in N''$.

Pouzitim pravidla $\beta v \to \alpha_{p,q} v$ ked p=βv dostaneme $U_1U_2 \dots U_n \Rightarrow V_{u,v1}U_2 \dots U_n$

Pouzitim pravidla $\alpha_{u,v} v\omega \to \alpha_{p,q} v\dot{\omega}_{p,q}$ dostaneme $V_{u,v1}U_2 \dots U_n \Rightarrow V_{u,v1}U_2 \dots \dot{U}_{u,v}n$

Ked vieme odvodit vetnu formu $V_{u,v1}V_2 \dots V_iU_{i+1}U_{i+2} \dots \dot{U}_{u,v}n$,

tak potom vieme odvodit aj vetnu formu $V_{u,v1}V_2 \dots V_iV_{i+1}U_{i+2} \dots \dot{U}_{u,v}n$. :

Pouzitim pravidla $\alpha_{p,q} u\beta v\dot{\omega}_{p,q} \to \alpha_{p,q} u\gamma v\dot{\omega}_{p,q}$ prepisaneho tak,ze p=$U_1 \dots U_n$ q=$V_1 \dots V_n$ a podmienkou ($|U_2 \dots U_i| = |V_2 \dots V_i|$ tato podienka je splnene lebo na oboch stranach rovnosti je rovnaky pocet symbolov odlzke 1) dostavame $V_{u,v1}V_2 \dots V_iU_{i+1}U_{i+2} \dots \dot{U}_{u,v}n \Rightarrow V_{u,v1}V_2 \dots V_iV_{i+1}U_{i+2} \dots \dot{U}_{u,v}n$.

Takze sa vieme dostat k vetnej forme $V_{u,v1}V_2 \dots V_{n-1}\dot{U}_{u,v}n$

a nakoniec pomocou pravidiel $\alpha_{p,q} v\omega_{p,q} \to \alpha v\dot{\omega}_{p,q}$, $u\omega_{p,q} \to uv$ dostavame $V_{u,v1}V_2 \dots V_{n-1}\dot{U}_{u,v}n \Rightarrow V_1V_2 \dots V_{n-1}\dot{U}_{u,v}n \Rightarrow V_1V_2 \dots V_{n-1}V_n$

Cim je tvrdenie dokazane

Lema 2 : Nech w∈L(G') potom existuje odvodenie $\sigma = W_0 \Rightarrow W_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow W_m$ take, ze ma pravidla tvaru $\xi_a \rightarrow a$ na konci a ostatne pravidla sa daju rozdelit na disjunktne casti, pre ktore plati prave jedna z tychto podmienok :
a. pouzivaju pravidlo $p \rightarrow q$ $p \in M$ $q \in (M)^+$ $M = N' - \{\alpha_{p,q}, \dot\omega_{p,q}\}$
b. pouzivaju pravidla
(1) $\beta v \rightarrow \alpha_{p,q} v$
(2) $\alpha_{p,q} v \omega \rightarrow \alpha_{p,q} v \dot\omega_{p,q}$
(3) $\alpha_{p,q} u \beta v \dot\omega_{p,q} \rightarrow \alpha_{p,q} u \gamma v \dot\omega_{p,q}$
(4) $\alpha_{p,q} v \dot\omega_{p,q} \rightarrow \alpha v \dot\omega_{p,q}$
(5) $u \omega_{p,q} \rightarrow uv$
v tomto poradi tak, ze $\alpha_{p,q}$ a $\dot\omega_{p,q}$ su v tejto casti jedine neterminaly tvaru $\beta_{u,v}$ alebo $\dot\beta_{u,v}$.

Dokaz : Nech w∈L(G') a nech $\sigma = W_0 \Rightarrow \ldots W_m =$ w je lubovolne odvodenie, ktore kroky odvodenia pomocou pravidla $\xi_a \rightarrow a$ na konci (Dokaz existencie : str 2).
Tvrdenie lemy 2 dokazeme pomocou indukcie na pocet neterminalov $\alpha_{p,q}$, pre ktore neplati dana podnmienka(zle neterminaly).
IZ : n = 0
Tvrdenie plati trivialne.
IP : Tvrdenie vieme dokazat pre menej ako n zlych neterminalov
ID : Tvrdenie vieme dokazat pre n zlych neterminalov
Zoberme si akykolvek usek porusujuci podmienku zacinajuci pravidlom (1) a konciaci pravidlom (5) s neterminalmi $\alpha_{p,q}$ a $\dot\omega_{p,q}$ taky, ze neobsahuje ziadnu vetnu formu, v ktorej by neboli neterminaly $\alpha_{p,q}$ alebo $\dot\omega_{p,q}$.
Este treba dodat, ze ked sa pouziva pravidlo(1) na vytvorenie neterminalu $\alpha_{p,q}$ nesmie povodna vetna forma obsahovat neterminal tvaru $\beta_{u,v}$ alebo $\dot\beta_{u,v}$.
(Takyto usek iste existuje pretoze na zaciatku odvodzovania vetna forma σ neobsahuje ziadne taketo neterminaly)
V takomto useku mozno najst aj ine neterminaly tvaru $\beta_{u,v}(u, v \neq p, q)$
Oznacme si poziciu neterminalu $\alpha_{p,q}$ "k" a poziciu neterminalu $\dot\omega_{u,v}$ "l"
Oznacme si poziciu neterminalu $\beta_{u,v}$ "k'" a poziciu s neterminalu s bodkou k nemu prisluchajucem u "l'"
Vieme, ze l<>l' a k<>k' pretoze ak by l=l' alebo k=k' tak pravidlo patri medzi pravidla (1)...(5) a preto nemoze toto pravidlo vytvorit neterminal tvaru $\beta_{u,v}$.
Teraz si vezmime zvysne pozicie :
k'<k≤l'<l taketo pravidlo sa moze nachadzat iba medzi pravidlami (4) a (5) pretoze inac by mu zavadzal neterminal $\alpha_{p,q}$, ktory nemoze byt sucastou u. Dalej vieme, ze taketo pravidlo potrebuje kontext, ktory je vytvoreny vymazanim neterminalu $\alpha_{p,q}$ avsak tento kontext sa zachova aj po pouziti pravidla (5). Teda taketo pravidlo mozeme presunut dolu.
k<k'≤l<l' Tento pripad je podobny prvemy pripadu len s tym rozdielom, ze zavadzia netermina $\dot\omega_{p,q}$ teda pravidlo je treba posunut hore.

k'<l'<k<l Kedze toto pravidlo je mimo kontextu nasich pravidiel (1)...(5) tak sa moze nachadzat medzi ktorymikolvek dvoma pravidlami (krokmi odvodenia). Teda ho mozno bez ujmy presunut aj hore aj dolu. Avsak taketo pravidlo moze dojst do kontextu s pravidlom v pripade 1. Teda je nutne ho presunut smerom dolu.

k<l<k'<l' Obdobne ako v predchadzajucom pripade len s tym rozdielom, ze pravidlo treba presunut hore.

k<k'<l'<l Pravidla, ktore maju tuto vlastnost sa nachadzaju :
a. za pravidlom (4) a pred pravidlom (5) :
taketo pravidlo moze vytvorit kontext pre pravidla s prveho pripadu a preto musi byt presunute spolu s spravidlami z prvej casti dolu.
b. za pravidlom (1) a pred pravidlom (2) :
tento pripad je podobny pripadu a avsak pravidlo treba posunut hore.
c. za pravidlom (2) a pred pravidlom (4) :
aby sa mohlo pouzit pravidlo (4) musia byt vsetky neterminaly pouzite blokom pre $\beta_{u,v}$ vratene na svoju povodnu poziciu. Preto su tieto pravidla irelevantne a mozno ich vynechat.

Definicie :

Posunutie pravidla hore : je to zmena polohy pouzitia pravidla v odvodeni taka, ze pravidlo v sa nachadza pred prevydlom p prave vtedy vtedy, ked
a. p je pravidlo posuvane nadol
b. p je jedno z pravidiel (1)..(5) pre $\alpha_{p,q}$, ktore sme si vybrali.
c. pravidlo v sa nachadzalo v povodnom odvodeni pred pravidlom p.

Posunutie pravidla dolu : je to zmena polohy pouzitia pravidla v odvodeni taka, ze pravidlo p sa nachadza pred prevydlom v prave vtedy vtedy, ked
a. p je pravidlo posuvane nahor
b. p je jedno z pravidiel (1)..(5) pre $\alpha_{p,q}$, ktore sme si vybrali.
c. pravidlo p sa nachadzalo v povodnom odvodeni pred pravidlom v.

Kedze posunutia z definicie zachovavaju poradie uz upravenych pravidiel a vsetky zle pravidla boli presunute (vymazane), tak dostavame odvodenie, ktore ma menej ako n zlych neterminalov co je IP.

Dokaz, ze L(G') = L(G")

L(G')$\supseteq$ L(G") : Nech w$\in$L(G") ma odvodenie tvaru $\sigma = W_0 \Rightarrow W_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow$w
Indukciou dokazeme, ze w$\in$L(G')

IZ : $\sigma'' = \sigma' \in$L(G')

IP : vieme odvodit vetnu formu W_i

ID : vieme odvodit aj vetnu formu W_{i+1}

Pouzitim Lemy 1 : vieme, ze odvodenie $W_i \Rightarrow W_{i+1}$ sa da nahradit nejakym odvodenim v G' Teda vieme odvodit aj vetnu formu W_{i+1}

w$\in$L(G')

L(G')$\subseteq$ L(G") : Nech w$\in$L(G') ma odvodenie tvaru z Lemy 2. Potom pre kazdu cast tohto odvodenia existuje urcite pravidlo v G".

a. pravidlo $\xi_a \to a$ je aj v G"

b. pravidlo p$\to$q je aj v G"

c. cast, v ktorej sa pouzivaju pravidla $\alpha_{p,q}$ a $\dot{\omega}_{p,q}$ sa da nahradit pravidlom p$\to$q

Nech p = $U_1 \ldots U_n$, q = $V_1 \ldots V_n$ $U_i, V_j \in N'$ $(i \leq; nj < n)$ Potom tato cast ma tvar $U_1 \ldots U_n \Rightarrow V_{p,q1}U_2 \ldots U_n \Rightarrow V_{p,q1}U_2 \ldots U_{n-1}\dot{U}_{p,q} \Rightarrow V_{p,q1}V_2U_3 \ldots U_{n-1}\dot{U}_{p,q} \Rightarrow \ldots \Rightarrow V_{p,q1}V_2 \ldots V_{n-2}U_{n-1}\dot{U}_{p,q} \Rightarrow V_{p,q1}V_2 \ldots V_{n-1}\dot{U}_{p,q} \Rightarrow V_1V_2 \ldots V_{n-1}\dot{U}_{p,q} \Rightarrow V_1V_2 \ldots V_{n-1}V_n$

Ked sa pozrieme na prvu cast vetnej formy a poslednu cast vetnej formy vidime, ze p$\Rightarrow^*$q

Teda odvodenie slova w v G" vieme najst.

Teda w$\in$ L(G")

Kedze L(G)=L(G')=L(G") dokazali sme, ze prekazdu gramatiku kontextovu vieme vytvorit gramatiku v Chomskeho tvare. Kedze Chomskeho tvar splna podmienky Kontextovej gramatiky tak vieme, ze Chomskeho definicia je ekvivalentna s klasickou definiciou kontextovej gramatiky.