Úloha 1.2

Zadanie:

1) Zadefinujte "1-ohraničený" normálny tvar pre a-prekladače taký, že a-prekladač je "1-ohraničeny", ak môže čítať a zapisovať najviac jeden znak, t.j.
ak $(q, u, v, p) \in M$ potom $|u| \leq 1$ a $|v| \leq 1$.

2) Dokážte, že trieda a-prekladačov je uzavretá na skladanie zobrazenia, teda že pre každý $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ existuje $\mathbf{M_3}$ taký, že $\mathbf{M_3(L) = M_2(M_1(L))}$.

Definície

Def.1: Konečnostavový "1-ohraničený" a-prekladač

$$M=(K,\Sigma_1,\Sigma_2,H,q_0,F)$$

$$H \underset{kon.}{\subseteq} (K\times\Sigma_1\cup\{\varepsilon\}\times\Sigma_2\cup\{\varepsilon\}\times K)$$

Def.2: Konfigurácia "1-ohraničeného" a-prekladača

$$(q,u,v)\in(K\times\Sigma_1^*\times\Sigma_2^*)$$

Def.3: Krok prekladu "1-ohraničeného" a-prekladača

(relácia $\vdash$)

Def.4: Zobrazenie "1-ohraničeného" a-prekladača

$$M(L)=\{u\in\Sigma_1^*|\exists v\in L,(q_0,v,\varepsilon)\vdash^*(p,\varepsilon,u),p\in F\}$$

Veta 1: O normálnom tvare

Nech L je jazyk. Potom ku ľubovoľnému a-prekladaču $M=(K,\Sigma_1,\Sigma_2,H,q_0,F)$ existuje ekvivalentný "1-ohraničený" a-prekladač M' taký, že M(L)=M'(L).

Dôkaz:

1) Zkonštruovanie M
2) Dôkaz ekvivalencie

Konštrukcia

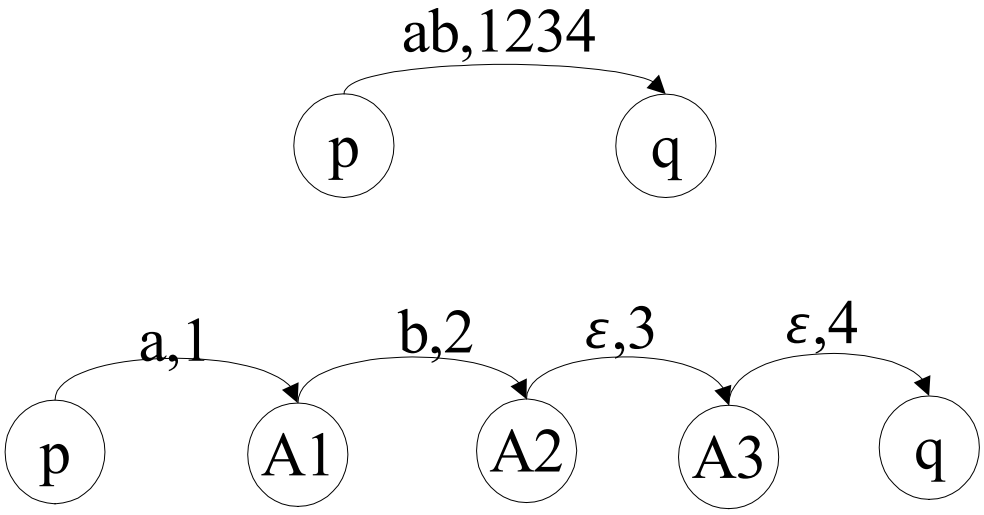
$$M' = (K', \Sigma_1, \Sigma_2, H', q_0, F)$$

$$H' = \{(p, u, v, q) \in H \mid |u| \leqslant 1, |v| \leqslant 1\} \cup$$
$$\{(q, \sigma_1 u, \sigma_1 v, q_{[q,u,v,p,2]}) \mid (q,u,v,p) \in H,$$
$$max(|u|,|v|) > 1\} \cup$$
$$\{(q_{[q,u,v,p,i]}, \sigma_i u, \sigma_i v, q_{[q,u,v,p,i+1]}) \mid (q,u,v,p) \in H,$$
$$i = 2 \ldots max(|u|,|v|) - 1\} \cup$$
$$\{(q_{[q,u,v,p,i]}, \sigma_i u, \sigma_i v, p) \mid (q,u,v,p) \in H,$$
$$i = max(|u|,|v|), i > 1\}$$

$$K'' = \{q_{[q,u,v,p,i]} \mid (q,u,v,p) \in H, i = 2 \ldots max(|u|,|v|)\}$$

$$K' = K \cup K''$$

Obr 1:



Dôkaz:

1) M(L)⊆M'(L)

Nech $u \in M(L) \overset{def.4}{\Rightarrow} \exists w \in L$ také, že

$$(q_{i1}=q_0, w=w_1 \dots w_n, \varepsilon) \vdash (q_{i2}, w_2 \dots w_n, u_1) \vdash \dots \vdash$$
$$(q_{ik}, w_n, u_1 \dots u_{n-1}) \vdash \dots \vdash (p=q_{i_{n+1}}, \varepsilon, u_1 u_2 \dots u_n = u)$$
$$p \in F, q_{ik} \in K, w_r \in \Sigma_1^*, u_s \in \Sigma_2^*$$

Preklad slova w na slova u v "1-ohraničenom" a-prekladači bude:

$$(q_0, w=w_1 \dots w_n, \varepsilon) \vdash^* (q_{i2}, w_2 \dots w_n, u_1) \vdash^* \dots \vdash^*$$
$$(q_{ik}, w_n, u_1 \dots u_{n-1}) \vdash^* \dots \vdash^* (p=q_{in+1}, \varepsilon, u_1 \dots u_n = u) \ ,$$

pričom pri kroku

$$(p, xu, v) \vdash^* (q, u, vy); \quad x=x_1 \dots x_n, y=y_1 \dots y_m$$

bude preklad závisieť od m a n takto:

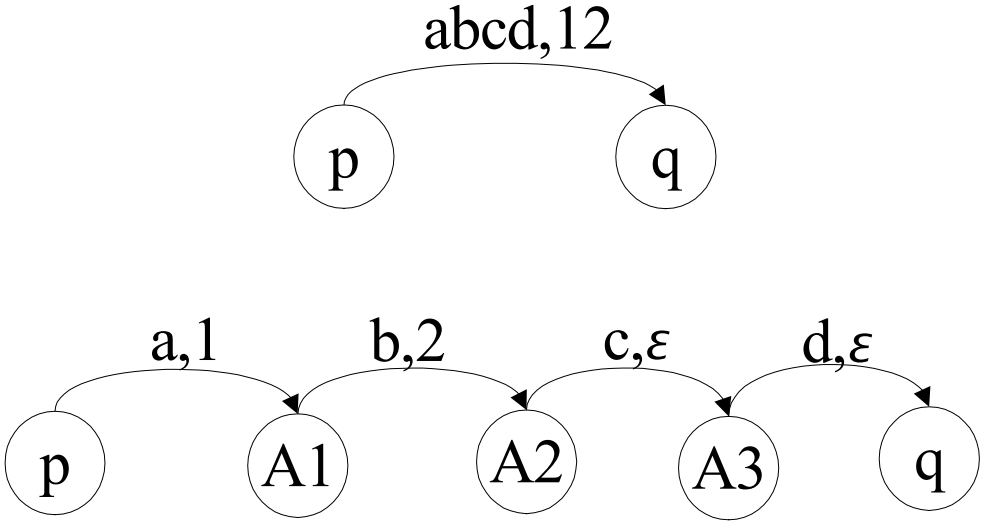
$$n \leqslant 1 \wedge m \leqslant 1 \Rightarrow max(|x|,|y|) \leqslant 1 \overset{Def.H'}{\Rightarrow} (p, x, y, q) \in H'$$

$n>1 \vee m>1 \Rightarrow max(|x|,|y|)>1$. Podľa $|x|,|y|$ rozlišujeme 3 prípady:

$|x|>|y| \vee |x|<|y| \vee |x|=|y|$

prípad pre $|x|>|y|$

Obr 2:



2) M(L)⊇M'(L)

Nech $u \in M'(L) \overset{def.4}{\Rightarrow} \exists w \in L$ také, že M' preloží slovo w na u. Tento preklad možno jednoznačne rozčleniť na úseky tvaru

$$(p, x_1 x_2 \ldots x_n u, v) \vdash (q_{[p,x,y,q,2]}, x_2 \ldots x_n u, v\, y_1) \vdash \ldots \vdash (q, u, v\, y_1 \ldots y_m); \quad p,q \in K$$

pričom $(p, x, y, q) \in H$. Preto ak označíme konfigurácie tvaru (p, u, v) , kde $p \in K$ ako $k_1, k_2, \ldots, k_l$, bude akceptačný preklad slova w na slovo u v a-prekladači M $k_1 \vdash k_2 \vdash \ldots \vdash k_l$, kde konfigurácia k_1 má tvar (q_0, w, ε) a konfigurácia k_l má tvar $(q, \varepsilon, u); u \in F$.

Lema 1:

Nech M je a-prekladač. Potom existuje a-prekladač M' taký, že

1) $M(L)=M'(L)$
2) ak označíme $M'=(K',\Sigma'_1,\Sigma'_2,H',q'_0,F')$, potom
   $\forall q\in K(q,\varepsilon,\varepsilon,q)\in H$. (NOP krok)

Dôkaz:

Nech $M=(K,\Sigma_1,\Sigma_2,H,q_0,F)$. M' zostrojíme nasledovne:

$$M'=(K,\Sigma_1,\Sigma_2,H',q_0,F)$$
$$H'=H\cup\{(q,\varepsilon,\varepsilon,q)|q\in K\}$$

1) **M(L)⊆M'(L):** Vidno priamo, lebo $H\subseteq H'$.
2) **M(L)⊇M'(L):** V najkratšom odvodení nepoužijem nové pravidlo, teda najkratšie odvodenie je aj odvodením v M(L)

Veta 2: O uzavretosti

Konečnostavové a-prekladače sú uzavreté na skladanie zobrazenia, teda

$\forall M_1, M_2 \ \exists M_3$ taký, že $M_3(L) = M_2(M_1(L))$

Dôkaz:

Podľa **vety 1** ku a-prekladačom M_1 a M_2 existujú "1-ohraničené" a-prekladače M'_1 a M'_2 .

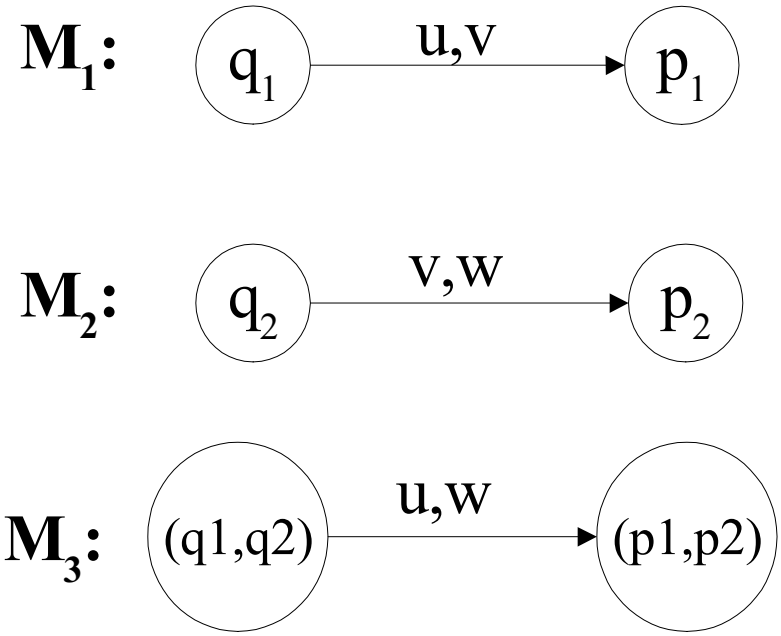
Nech $M'_1 = (K_1, \Sigma_1, \Sigma_2, H_1, q1_0, F_1)$ a

$M'_2 = (K_2, \Sigma_3, \Sigma_4, H_2, q2_0, F_2)$.

Prekladač M_3 zostrojím nasledovne:

$$M_3=(K,\Sigma_1,\Sigma_4,H,(q1_0,q2_0),F)$$
$$K=K_1\times K_2$$
$$H=\{((q_1,q_2),u,w,(p_1,p_2))\in(K\times(\Sigma_1\cup\{\varepsilon\})\times(\Sigma_4\cup\{\varepsilon\})\times K)\mid$$
$$\exists v\in(\Sigma_2\cap\Sigma_3)\cup\{\varepsilon\};$$
$$(q_1,u,v,p_1)\in H_1\wedge(q_2,v,w,p_2)\in H_2\}$$
$$F=F_1\times F_2$$

Obr 3:



Dôkaz správnosti konštrukcie:

Dokážem dve inklúzie:

1) $M_3(L) \subseteq M_2(M_1(L))$.

Nech $u \in M_3(L) \overset{Def.4}{\Rightarrow} \exists w \in L$ také že $((q1_{0,}\, q2_0), w, \varepsilon) \vdash^*_{M_3} (q_f, \varepsilon, u); q_f \in F$ Máme dokázať, že $\exists t \in (\Sigma_2 \cup \Sigma_3)^*$ také, že $(q1_0, w, \varepsilon) \vdash^*_{M_1} (q_a, \varepsilon, t) \wedge (q2_0, t, \varepsilon) \vdash^*_{M_2} (q_b, \varepsilon, u)$ kde $p_a \in F_1 \wedge q_b \in F_2$

Dokážem, že prekladač M_1 akceptuje slovo w tak, že zostrojím jeho akceptačný preklad. Z prekladu slova w získam slovo s.

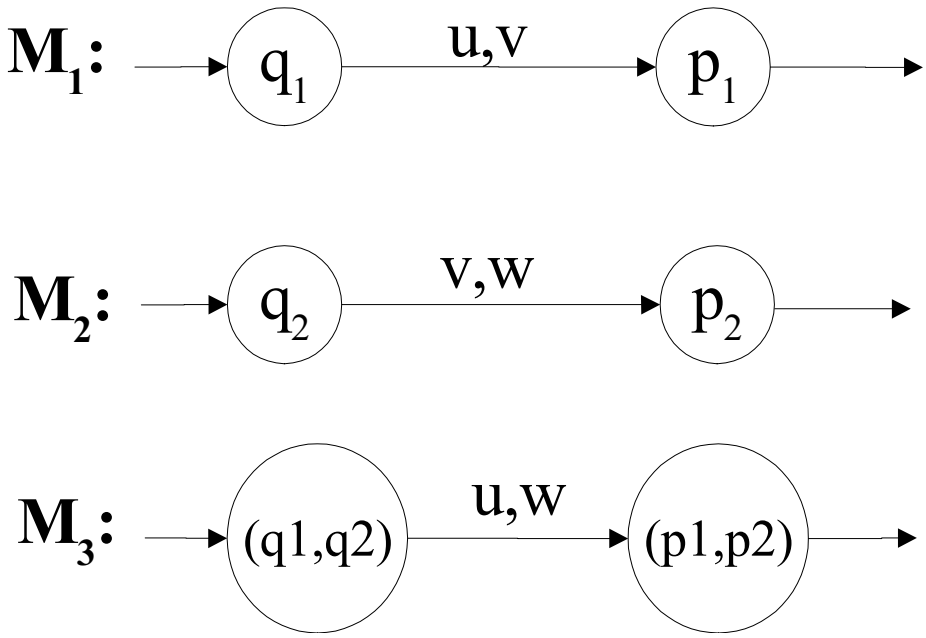
Dokážem, že $(q2_0, s, \varepsilon) \vdash^*_{M_2} (q_f, \varepsilon, u) \wedge q_f \in F_2$.

Teda existuje také t (je to s) a preto $M_3(L) \subseteq M_2(M_1(L))$.

2) $M_3(L) \supseteq M_2(M_1(L))$.

Podľa **lemy 1** ku a-prekladačom M_1 a M_2 existujú a-prekladače M'_1 a M'_2 ktoré obsahujú NOP kroky.
Preto existujú "zladené" preklady, t.j. výpočet prebehne na rovnaký počet krokov a v každom kroku prekladač M_2 číta znak (alebo ε), ktorý prekladač M_1 vyrobí.

Obr 4:



Spojením týchto prekladov získam preklad v a-prekladači M_3.