Tomáš Bujňák, 2i1

Úloha 1.2

Zadanie: Zadefinujte "1-ohraničený" normálny tvar pre a-prekladače taký, že a-prekladač je "1-ohraničeny", ak môže čítať a zapisovať najviac jeden znak, t.j. ak (q, u, v, p) ∈ M, potom |u| ≤ 1 a |v| ≤ 1.

Dokážte, že trieda a-prekladačov je uzavretá na skladanie zobrazenia, teda že pre každý M_1, M_2 existuje M_3 taký, že $M_3(L) = M_2(M_1(L))$.

Riešenie:

Def.1: Konečnostavový "1-ohraničený" a-prekladač s akceptačnými stavmi je 6-tica $M=(K,\Sigma_1,\Sigma_2,H,q_0,F)$, kde K je konečná množina stavov, $\sum_1$, $\sum_2$ sú vstupné a výstupné abecedy, $q_0\in K$ je počiatočný stav, $F\subseteq K$ je množina akceptačných stavov, $H \underset{kon.}{\subseteq} (K\times\Sigma_1\cup\{\varepsilon\}\times\Sigma_2\cup\{\varepsilon\}\times K)$ je množina pravidiel.

Def.2: Konfiguráciu "1-ohraničeného" a-prekladača nazývame trojicu $(q,u,v)\in(K\times\Sigma_1^*\times\Sigma_2^*)$, kde q je stav KSRJ, **u** je zvyšok vstupného slova, **v** je už spracované (preložené) vstupné slovo.

Def.3: Krok prekladu (výpočtu) "1-ohraničeného" a-prekladača je relácia $\vdash$ na konfigurácii $(p,xu,v)\vdash(q,u,vy)$, ak $(p,x,y,q)\in H$.

Def.4: Zobrazenie "1-ohraničeného" a-prekladača je definované takto:
$M(L)=\{u\in\Sigma_1^*|\exists v\in L,(q_0,v,\varepsilon)\vdash^*(p,\varepsilon,u),p\in F\}$

Veta 1 (O normálnom tvare):
Nech L je jazyk. Potom k ľubovoľnému a-prekladaču $M=(K,\Sigma_1,\Sigma_2,H,q_0,F)$ existuje ekvivalentný "1-ohraničený" a-prekladač M' taký, že M(L)=M'(L).

Dokaz: Najprv zkonštruujem prekladač M' a potom dokážem ekvivalenciu.
Pre zjednodušenie zápisu zadefinujem funkciu $\sigma_N:(\Sigma_1\cup\Sigma_2)^*\to(\Sigma_1\cup\Sigma_2)$ takto:
Nech $u=u_1\ldots u_n$, potom $\sigma_i u=\begin{cases}u_i; i\leq n\\ \varepsilon; i>n\end{cases}$
Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $K\cap K''=\emptyset$. M' zostrojíme nasledovne:

$M'=(K',\Sigma_1,\Sigma_2,H',q_0,F)$
$H'=\{(p,u,v,q)\in H\,||u|\leq 1,|v|\leq 1\}\cup$
$\{(q,\sigma_1 u,\sigma_1 v,q_{[q,u,v,p,2]})|(q,u,v,p)\in H, max(|u|,|v|)>1\}\cup$
$\{(q_{[q,u,v,p,i]},\sigma_i u,\sigma_i v,q_{[q,u,v,p,i+1]})|(q,u,v,p)\in H, i=2\ldots max(|u|,|v|)-1\}\cup$
$\{(q_{[q,u,v,p,i]},\sigma_i u,\sigma_i v,p)|(q,u,v,p)\in H, i=max(|u|,|v|), i>1\}$
$K''=\{q_{[q,u,v,p,i]}|(q,u,v,p)\in H, i=2\ldots max(|u|,|v|)\}$
$K'=K\cup K''$

Dôkaz správnosti konštrukcie:

Dokážem dve inklúzie:

1)**M(L)⊆M'(L)**

Nech $u \in M(L) \overset{def.4}{\Rightarrow} \exists w \in L$ také, že
$(q_0 = q_{i_1}, w = w_1 w_2 \dots w_n, \varepsilon) \vdash (q_{i_2}, w_2 \dots w_n, u_1) \vdash \dots \vdash (q_{i_k}, w_n, u_1 u_2 \dots u_{n-1}) \vdash$
$\vdash (p = q_{i_{n+1}}, \varepsilon, u_1 u_2 \dots u_n = u)$, $p \in F, q_{i_k} \in K, w_r \in \Sigma_1^*, u_s \in \Sigma_2^*$
Preklad slova w na slova u v "1-ohraničenom" a-prekladači bude:
$(q_0, w_1 w_2 \dots w_n, \varepsilon) \vdash^* (q_{i_2}, w_2 \dots w_n, u_1) \vdash^* \dots \vdash^* (q_{i_{n+1}} = p, \varepsilon, u_1 u_2 \dots u_n = u)$, pričom pri kroku $(p, xu, v) \vdash^* (q, u, vy)$; $x = x_1 \dots x_n$, $y = y_1 \dots y_m$ bude preklad nasledovný:
1) ak $n \leq 1 \wedge m \leq 1 \Rightarrow max(|x|, |y|) \leq 1 \overset{Def.H'}{\Rightarrow} (p, x, y, q) \in H'$ a
$(p, xu, v) \vdash^* (q, u, vy) = (p, xu, v) \vdash (q, u, vy)$.
2) ak $n > 1 \vee m > 1 \Rightarrow max(|x|, |y|) > 1$. Podľa $|x|, |y|$ rozlišujeme 3 prípady:
ak $|x| = |y|$, potom
$(p, xu, v) \vdash^* (q, u, vy) = (p, x_1 \dots x_n u, v) \vdash (q_{[p,x,y,q,2]}, x_2 \dots x_n u, v\, y_1) \vdash \dots \vdash$
$\vdash (q_{[p,x,y,q,n]}, x_n u, v\, y_1 \dots y_{n-1}) \vdash (q, u, v\, y_1 \dots y_n)$.
ak $|x| > |y|$, potom
$(p, xu, v) \vdash^* (q, u, vy) = (p, x_1 \dots x_n u, v) \vdash (q_{[p,x,y,q,2]}, x_2 \dots x_n u, v\, y_1) \vdash \dots \vdash$
$\vdash (q_{[p,x,y,q,m+1]}, x_{m+1} \dots x_n u, v\, y_1 \dots y_m) \vdash (q_{[p,x,y,q,m+2]}, x_{m+2} \dots x_n u, y)$
$\vdash (q_{[p,x,y,q,n]}, x_n u, v\, y) \vdash (q, u, v\, y)$.
Prípad, keď $|x| < |y|$ je podobný $|x| > |y|$.
Ľahko vidieť, že pre každý krok existuje podľa definície zodpovedajúce pravidlo v H'.
Keďže $q_0 = q_0$ a F=F, podľa def.4. existuje akceptačný preklad slova w na slovo u v prekladači M'.

2)**M(L)⊇M'(L)**

Nech $u \in M'(L) \overset{def.4}{\Rightarrow} \exists w \in L$ také, že
$(q_0 = q_{i_1}, w = w_1 w_2 \dots w_n, \varepsilon) \vdash (q_{i_2}, w_2 \dots w_n, u_1) \vdash \dots \vdash (q_{i_k}, w_n, u_1 u_2 \dots u_{n-1}) \vdash$
$\vdash (p = q_{i_{n+1}}, \varepsilon, u_1 u_2 \dots u_n = u)$, $p \in F, q_{i_k} \in K', w_r \in \Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}\, u_s \in \Sigma_2 \cup \{\varepsilon\}$
Kedže $K \cap K = \emptyset$ a pre každé pravidlo tvaru $(q_{[p,x,y,q,n]}, a, b, q_{[p,x,y,q,n+1]})$ je vzhľadom na definovanie množiny H' jednoznačne určený predchodca a nasledovník, preklad slova w na u možno jednoznačne rozdeliť na úseky tvaru
$(p, x_1 x_2 \dots x_n u, v) \vdash (q_{[p,x,y,q,2]}, x_2 \dots x_n u, v\, y_1) \vdash \dots \vdash (q, u, v\, y_1 \dots y_m)$; $p, q \in K$
pre $x = x_1 \dots x_n$, $y = y_1 \dots y_m$, pri ktorých sa postupne použili pravidlá
$(p, x_1, y_1 q_{[p,x,y,q,2]}), (q_{[p,x,y,q,2]}, x_2, y_2, q_{[p,x,y,q,3]}), \dots, (q_{p,x,y,q,n}, \sigma_n x, \sigma_n y, q)$, ktoré podľa definície H' vznikli z pravidiel $(p, x, y, q) \in H$. Preto ak označíme konfigurácie tvaru (p, u, v) , kde $p \in K$ ako $k_1, k_2, \dots, k_l$, bude akceptačný preklad slova w na slovo u v a-prekladači M $k_1 \vdash k_2 \vdash \dots \vdash k_l$, kde konfigurácia k_1 má tvar (q_0, w, ε) a konfigurácia k_l má tvar (q, ε, u); $u \in F$, teda podľa def.4 existuje akceptačný preklad slova w na slovo u v prekladači M.

Tomáš Bujňák, 2i1

Lema 1: Nech M je a-prekladač. Potom existuje a-prekladač M' taký, že
1) $M(L)=M'(L)$
2) ak označíme $M'=(K',\Sigma'_1,\Sigma'_2,H',q'_0,F')$, potom $\forall q\in K(q,\varepsilon,\varepsilon,q)\in H$.

Dôkaz: Nech $M=(K,\Sigma_1,\Sigma_2,H,q_0,F)$. M' zostrojíme nasledovne:
$M'=(K,\Sigma_1,\Sigma_2,H',q_0,F)$
$H'=H\cup\{(q,\varepsilon,\varepsilon,q)|\ q\in K\}$
Z definície H' vyplýva, že 2) platí. Stačí dokázať, že $M(L)=M'(L)$.

Dokážem dve inklúzie:

1) **M(L)⊆M'(L)**
Nech $v\in M(L)$. Potom $\exists u\in\Sigma_1^*$ také, že $(q_0,u,\varepsilon)\vdash_M^*(q_f,\varepsilon,v);\ q_f\in F$.
Tvrdím, že $(q_0,u,\varepsilon)\vdash_M^*(q_f,\varepsilon,v);\ q_f\in F$ je aj odvodenie slova v prekladači M', pretože $H\subseteq H'$.

2) **M(L)⊇M'(L)**
Nech $v\in M'(L)$. Potom $\exists u\in\Sigma_1^*$ také, že $(q_0,u,\varepsilon)\vdash_{M'}^*(q_f,\varepsilon,v);\ q_f\in F$.
Uvažujme najkratší preklad slova u na slovo v $(q_0,u,\varepsilon)\vdash_{M'}^*(q_g,\varepsilon,v);\ q_g\in F$.
Pri tomto preklade sa nepoužijú pravidlá tvaru $(q,\varepsilon,\varepsilon,q)$, lebo by to bolo v spore s predpokladom najkratšieho prekladu. Preto je tento preklad aj prekladom v a-prekladači M.

Veta 2: Konečnostavové a-prekladače sú uzavreté na skladanie zobrazenia, teda
$\forall M_1, M_2 \ \exists M_3$ taký, že $M_3(L)=M_2(M_1(L))$

Dôkaz: Podľa vety 1 ku a-prekladačom M_1 a M_2 existujú "1-ohraničené" a-prekladače M'_1 a M'_2 .
Nech $M'_1=(K_1,\Sigma_1,\Sigma_2,H_1,q1_0,F_1)$ a $M'_2=(K_2,\Sigma_3,\Sigma_4,H_2,q2_0,F_2)$. Prekladač M_3 zostrojím nasledovne:
$M_3=(K,\Sigma_1,\Sigma_4,H,(q1_0,q2_0),F)$
$K=K_1\times K_2$
$H=\{((q_1,q_2),u,w,(p_1,p_2))\in(K\times(\Sigma_1\cup\{\varepsilon\})\times(\Sigma_4\cup\{\varepsilon\})\times K) \mid \exists v\in(\Sigma_2\cap\Sigma_3)\cup\{\varepsilon\};$
$(q_1,u,v,p_1)\in H_1\wedge(q_2,v,w,p_2)\in H_2\}$
$F=F_1\times F_2$

Dôkaz správnosti konštrukcie:

Dokážem dve inklúzie:

1) $M_3(L)\subseteq M_2(M_1(L))$.

Nech $u\in M_3(L) \overset{Def.4}{\Rightarrow} \exists w\in L$ také že
$((p_1,q_1)=(q1_0,q2_0),w=w_1w_2\ldots w_n,\varepsilon)\vdash((p_2,q_2),w_2\ldots w_n,u_1)\vdash\ldots\vdash$
$\vdash((p_i,q_i),w_i\ldots w_n,u_1\ldots u_{i-1})\vdash((p_{i+1},q_{i+1}),w_{i+1}\ldots w_n,u_1\ldots u_i)\vdash\ldots\vdash$
$((p_{n+1},q_{n+1}),\varepsilon,u_1u_2\ldots u_n=u)$
$(p_{n+1},q_{n+1})\in F;\ \ w_i\in\Sigma_1\cup\{\varepsilon\};\ \ u_i\in\Sigma_4\cup\{\varepsilon\};(p_i,q_i)\in K$

Stačí dokázať, že
$\exists t\in(\Sigma_2\cup\Sigma_3)^*;(q1_0,w,\varepsilon)\vdash^*_{M_1}(q_a,\varepsilon,t)\wedge(q2_0,t,\varepsilon)\vdash^*_{M_2}(q_b,\varepsilon,u)$, kde
$p_a\in F_1\wedge q_b\in F_2$.

Najprv dokážem, že prekladač M_1 akceptuje slovo w tak, že zostrojím jeho akceptačný preklad.
$\forall i=\overline{1\ldots n}$ platí
$((p_i,q_i),w_i\ldots w_n,u_1\ldots u_{i-1})\vdash((p_{i+1},q_{i+1}),w_{i+1}\ldots w_n,u_1\ldots u_i) \overset{def.3}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow\exists((p_i,q_i),w_i,u_i,(p_{i+1},q_{i+1}))\in H \overset{def.}{\Rightarrow}\exists s_i\in(\Sigma_2\cap\Sigma_3)\cup\{\varepsilon\}$ také, že
$(p_i,w_i,s_i,p_{i+1})\in H_1\wedge(q_i,s_i,u_i,q_{i+1})\in H_2$
Teda $\forall i=\overline{1\ldots n}$ platí $(p_{i,}w_i,s_{i,}p_{i+1})\in H_1 \overset{def.3}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow(p_i,w_i\ldots w_n,s_1s_2\ldots s_{i-1})\vdash(p_{i+1},w_{i+1}\ldots w_n,s_1s_2\ldots s_i)$ je krok prekladu "1-ohraničeného" a-prekladača.
Keďže $(p_{n+1},q_{n+1})\in F \overset{def.}{\Rightarrow} p_{n+1}\in F_1$,
$(p_1=q1_{0,}w=w_1w_2\ldots w_n,\varepsilon)\vdash(p_2,w_2\ldots w_n,s_1)\vdash\ldots\vdash(p_{i,}w_i\ldots w_n,s_1\ldots s_{i-1})\vdash$
$\vdash\ldots\vdash(p_{n,}w_n,s_1s_2\ldots s_{n-1})\vdash(p_{n+1},\varepsilon,s_1s_2\ldots s_n=s)$
je akceptačný preklad slova w na slovo s v "1-ohraničenom" a-prekladači M_1 .

Teraz dokážem, že
$(q2_0, t, \varepsilon) \vdash^*_{M_2} (q_f, \varepsilon, u) \wedge q_f \in F_2$.

$\forall i = \overline{1...n}$ platí $(p_i, w_i, s_i, p_{i+1}) \in H_1 \wedge (q_i, s_i, u_i, q_{i+1}) \in H_2$. Teda $\forall i = \overline{1...n}$ $(q_{i,} s_i, u_{i,} q_{i+1}) \in H_2 \overset{def.3}{\Rightarrow} (q_i, s_i \ldots s_n, u_1 u_2 \ldots u_{i-1}) \vdash (q_{i+1}, s_{i+1} \ldots s_n, u_1 u_2 \ldots u_i)$ je krok prekladu "1-ohraničeného" a-prekladača.
Keďže $(p_{n+1}, q_{n+1}) \in F \overset{def.}{\Rightarrow} q_{n+1} \in F_2$, preto
$(q_1 = q2_{0,} s = s_1 s_2 \ldots s_n, \varepsilon) \vdash (q_2, s_2 \ldots s_n, u_1) \vdash \ldots \vdash (q_{i,} s_i \ldots s_n, u_1 \ldots u_{i-1}) \vdash$
$\vdash \ldots \vdash (q_{n,} s_n, u_1 u_2 \ldots u_{n-1}) \vdash (q_{n+1}, \varepsilon, u_1 u_2 \ldots u_n = u)$
je akceptačný preklad slova s na slovo u v "1-ohraničenom" a-prekladači M_2 , teda
$(q2_0, t, \varepsilon) \vdash^*_{M_2} (q_f, \varepsilon, u) \wedge q_f \in F_2$

Keďže $s \in (\Sigma_2 \cap \Sigma_3)^*$ a s spĺňa požadované vlastnosti, stačí položiť $s \equiv t$.

Tým som ukázal, že
$\exists t \in (\Sigma_2 \cup \Sigma_3)^*; (q1_0, w, \varepsilon) \vdash^*_{M_1} (q_a, \varepsilon, t) \wedge (q2_0, t, \varepsilon) \vdash^*_{M_2} (q_b, \varepsilon, u)$, kde
$p_a \in F_1 \wedge q_b \in F_2$, teda $M_3(L) \subseteq M_2(M_1(L))$.

2) $M_3(L) \supseteq M_2(M_1(L))$.

Nech $w \in M_2(M_1(L)) \overset{def.4}{\Rightarrow} \exists u \in L \wedge \exists s \in (\Sigma_2 \cap \Sigma_3)^*$ také, že
$(q1_0, u, \varepsilon) \vdash^*_{M_1} (q1_f, \varepsilon, s); q1_f \in F_1 \wedge (q2_0, u, \varepsilon) \vdash^*_{M_1} (q1_f, \varepsilon, s); q2_f \in F_2$.

Podľa lemy 1, ku a-prekladačom M_1 a M_2 existujú ekvivalentné a-prekladače
$M'_1 = (K_1, \Sigma_1, \Sigma_2, H'_1, q1_0, F_1)$ a $M'_2 = (K_2, \Sigma_3, \Sigma_4, H'_2, q2_0, F_2)$ také, že
$\forall p \in K_1 (p, \varepsilon, \varepsilon, p) \in H'_1 \wedge \forall p \in K_2 (p, \varepsilon, \varepsilon, p) \in H'_2$.

Preto existujú preklady
$(p_1 = q1_0, u = u_1 \ldots u_n, \varepsilon) \vdash_{M'_1} (p_2, u_2 \ldots u_n, s_1) \vdash_{M'_1} \ldots \vdash_{M'_1} (p_i, u_i \ldots u_n, s_1 \ldots s_{i-1})$
$\vdash_{M'_1} \ldots \vdash_{M'_1} (p_n, u_n, s_1 s_2 \ldots s_{n-1}) \vdash_{M'_1} (p_{n+1}, \varepsilon, s = s_1 s_2 \ldots s_n)$, pričom
$p_{n+1} \in F_1; u_i \in \Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}; s_i \in (\Sigma_2 \cap \Sigma_3) \cup \{\varepsilon\}$ a
$(q_1 = q2_0, t_1 t_2 \ldots t_m, \varepsilon) \vdash_{M'_2} (q_2, t_2 \ldots t_m, w_1) \vdash_{M'_2} \ldots \vdash_{M'_2} (q_i, t_i \ldots t_m, w_1 \ldots w_{i-1})$
$\vdash_{M_2} \ldots \vdash_{M_2} (q_m, t_m, w_1 w_2 \ldots w_{m-1}) \vdash_{M_2} (q_{m+1}, \varepsilon, w = w_1 w_2 \ldots w_m)$, pričom
$q_{m+1} \in F_2; t_i \in (\Sigma_2 \cap \Sigma_3) \cup \{\varepsilon\}; w_i \in \Sigma_4 \cup \{\varepsilon\}$ také, že $m = n \wedge \forall i = \overline{1..m}$ $t_i = s_i$.
Tvrdím, že
$((p_1, q_1) = (q1_0, q2_0), u = u_1 \ldots u_n, \varepsilon) \vdash ((p_2, q_2), u = u_2 \ldots u_n, w_1) \vdash \ldots \vdash$
$\vdash ((p_i, q_i), u = u_i \ldots u_n, w_1 \ldots w_{i-1}) \vdash \ldots \vdash ((p_{n+1}, q_{n+1}), \varepsilon, w_1 \ldots w_n)$ je
prekladom slova u na slovo w v a-prekladači M_3 , pretože $\forall i = \overline{1...n}$ platí, že
$(p_i, u_i, s_i, p_{i+1}) \in H_1 \wedge (q_i, s_i, w_i, q_{i+1}) \in H_2 \Rightarrow \exists v = s_i \in (\Sigma_2 \cap \Sigma_3) \cup \{\varepsilon\} \Rightarrow$
$\overset{def.}{\Rightarrow} ((p_i, q_i), u_i, w_i, (p_{i+1}, q_{i+1})) \in H$.
Keďže $p_{n+1} \in F_1 \wedge q_{n+1} \in F_2 \overset{def.}{\Rightarrow} (p_{n+1}, q_{n+1}) \in F$, preto existuje akceptačný preklad slova u na slovo w, a preto $w \in M_3(L)$.