Prezentácia úlohy č.4 z prvej sady domácich úloh.

Meno: Tomáš Dzamko
Skupina: 2i1,foja1
Cvičiaci: B.Rovan

Zadanie: Zostrojte bezkontextovú gramatiku G pre jazyk L={ ww^Rw | $w \in \{a,b\}^*$ } takú, že L=L(G) a dokážte správnosť svojej konštrukcie.

Riešenie: Gramatiku zostrojíme nasledovne: G=(N, T, σ, P) kde

N={ A, B, Z, K, σ, α }
T={ a,b}
P={

$\sigma \rightarrow \alpha_a K_a \mid \alpha_b K_b$
$\alpha_a \rightarrow a\alpha_a Aa \mid b\alpha_a Bb \mid aa$
$\alpha_b \rightarrow a\alpha_b Aa \mid b\alpha_b Bb \mid bb$
$Aa \rightarrow aA$
$Ab \rightarrow bA$
$Ba \rightarrow aB$
$Bb \rightarrow bB$
$AK_a \rightarrow aK_a$
$BK_a \rightarrow bK_a$
$AK_b \rightarrow aK_b$
$BK_b \rightarrow bK_b$
$K_a \rightarrow a$
$K_b \rightarrow b$

}

Dôkaz: 1.) $L \subseteq L(G)$

Dokážeme, že všetky slová z jazyka L vieme vygenerovať pomocou uvedených pravidiel. Zrejme všetky slová z L sú tvaru ww^Rw. Teraz dokážeme, že vieme dostať uvedený tvar pomocou pravidiel takto:
Použitím pravidiel: $\sigma \rightarrow \alpha_a K_a \mid \alpha_b K_b$
$\alpha_a \rightarrow a\alpha_a Aa \mid b\alpha_a Bb \mid aa$
$\alpha_b \rightarrow a\alpha_b Aa \mid b\alpha_b Bb \mid bb$
dostaneme tvar ww^RK_a , resp. ww^RK_b pričom sa tam ešte vyskytujú neterminály A, resp. B. Ďalej použitím pravidiel **$Aa \rightarrow aA$, $Ab \rightarrow bA$, $Ba \rightarrow aB$, $Bb \rightarrow bB$, $AK_a \rightarrow aK_a$, $BK_a \rightarrow bK_a$, $AK_b \rightarrow aK_b$, $BK_b \rightarrow bK_b$** dostaneme tvar ww^RwK_a , resp. ww^RwK_b a stačí použiť pravidlá **$K_a \rightarrow a$ $K_b \rightarrow b$,** aby sme odstránili neterminály K_a a K_b. Takto sme dostali požadovaný tvar a teda pomocou uvedených pravidiel vieme vygenerovať všetky slová patriace do jazyka L. Týmto sme dokázali prvú inklúziu.

2.) $L \supseteq L(G)$

Chceme dokázať, že všetky slová vygenerované pomocou uvedených pravidiel patria do jazyka L. Budeme dokazovať matematickou indukciou vzhľadom na počet písmen slova **v=** ww^Rw. Dokážeme, že všetky slová

vygenerované pomocou uvedených pravidiel sú tvaru ww^Rw kde $w \in \{a,b\}^*$.

Indukčný predpoklad: nech slovo z L(G) dĺžky n je tvaru ww^Rw, potom aj slovo dĺžky n+3 vygenerované pomocou pravidiel G je tvaru ww^Rw a slová dĺžky n+1 a n+2 sa nedajú vygenerovať.

1. Báza indukcie:

n=0……. $v = \varepsilon$, $v \in L$.....OK

n=1.....buď v=a alebo v=b....nedajú sa vygenerovať, lebo ostanú neterminály α_a, resp. α_b , teda slovo dĺžky 1 gramatika nevygeneruje.

n=2……..opäť sa slová tejto dĺžky nedajú vygenerovať, lebo nevznikne terminálne slovo, ostanú neterminály K_a, resp. K_b.

n=3……..máme len dve možnosti, a to v=aaa alebo v=bbb, iné slová majú väčšiu dĺžku alebo sa nedajú vygenerovať. Slová aaa, resp. bbb patria do L lebo spĺňajú podmienku.

2. Indukčný krok:

máme slovo dĺžky n, ktoré je tvaru ww^Rw a ukážeme, že slová dĺžky n+3 vygenerované pomocou pravidiel P budú patriť do L, slová dĺžok n+1, resp. n+2 sa nedajú vygenerovať.

Máme len dva prípustné tvary: $w\alpha_a\, w^Rw\, K_a$ alebo $w\alpha_b\, w^Rw\, K_b$

Slová dĺžok n+1, resp. n+2 nemôžu vzniknúť, lebo ostanú neterminály $\alpha_a, \alpha_b, K_a, K_b$, ktoré keď zaniknú vytvoria slovo dlhšie ako n+1, resp. n+2.

Slová dĺžky n+3 vytvoríme pomocou pravidiel: $K_a \rightarrow a$, $K_b \rightarrow b$, $\alpha_a \rightarrow aa$, $\alpha_b \rightarrow bb$, lebo vzniknú 3 písmená **a** alebo 3 písmená **b.** Iné slová budú mať väčšiu dĺžku ako n+3. Je zrejmé, že slová $waaw^Rwa$, resp. $wbbw^Rwb$ patria do L lebo spĺňajú danú vlastnosť.

Dokázali sme teda, že gramatika generuje len slová z jazyka L a teda platí $L \supseteq L(G)$, čiže $L = L(G)$.