Úloha 1
Zostrojte zásobníkový automat A pre jazyk:

$L = \{ucv \mid u, v \in 1\{0,1\}^*$ a zároveň u, v nie sú binárne zápisy po sebe idúcich čísel takých, že $u \leq v$ a "c" je terminálny symbol$\}$

Dokážte správnosť konštrukcie
(t.j. $L(\mathsf{A}) = L$).

Pozn.: $1\{0,1\}^*$ reprezentuje množinu binárnych reťazcov, začínajúcich bitom 1 (teda nemajú žiadne leading zeros).

DEF Nedeterministický zásobníkový automat (push down automat, PDA), je 7-tica $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde K je konečná množina stavov, Σ, Γ ja abeceda vstupných, resp. zásobníkových symbolov, $q_0 \in K$ je počiatočný stav, $Z_0 \in \Gamma$ je počiatočný symbol v zásobníku, $F \subseteq K$ je množina akceptačných stavov a $\delta : K \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{K \times \Gamma^*}_{KON}$

DEF Konfigurácia je trojica $(q, av, \gamma Z)$ z $K \times \Sigma^* \times \Gamma^*$, automat je v stave q, zvyšok vstupu je av (číta a) a obsah zásobníka je γZ (Z je vrch zásobníka).

DEF Krok výpočtu zásobníkového automatu je relácia $\vdash$ na konfiguráciách, $(q, av, \gamma Z) \vdash (p, v, \gamma\beta)$ ak $(p, \beta) \in \delta(q, a, Z)$, kde $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a $Z \in \Gamma$.

DEF Jazyk akceptovaný koncovým stavom nedeterministického automatu A je
$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \gamma),$
$\gamma \in \Gamma^*, q \in F\}$

Vlastnosti po sebe idúcich čísel.

- po sebe idúce čísla majú približne rovnakú dĺžku

$$|u| = |v| \ \vee \ |u| + 1 = |v|$$

- po sebe idúce čísla majú rôzny posledný bit

- ak $|u| + 1 = |v|$, potom u je predchodca v len ak $u = \underbrace{1 \ldots 1}_{n}$ a $v = 1\underbrace{0 \ldots 0}_{n}$

- ak $|u| = |v|$, potom u je predchodca v ak majú tvar

$$u = x01^n \qquad v = x10^n$$

kde $x \in 1\{0,1\}^m, \quad m, n \geq 0$

charakteristický sufix:

$$01^n \qquad 10^n$$

Nedeterministické rozhodnutie podľa dĺžky u a v, teda podľa vzťahu $|u|$? $|v|$

- $|u| + 2 \leq |v|$ - akceptujeme
- $|u| + 1 = |v|$ - neakceptujeme len vtedy, keď $u = \underbrace{11\ldots1}_{n}$ a $v = 1\underbrace{00\ldots0}_{n}$, inak akceptujeme
- $|u| = |v|$ - rozlišujeme dva prípady:
  - u a v majú rovnakú paritu $\rightarrow$ akceptujeme
  - u a v majú rôznu paritu, overíme, či u je predchodca v, ak nie je, tak slovo akceptujeme
- $|u| > |v|$ - akceptujeme

$A = (\{q_0, \dots,\ q_{21},\ p_1, \dots,\ p_5,\ s_1, \dots,\ s_8,$
$r_1, \dots,\ r_4,\ t_1, \dots,\ t_{10}\},\ \{0, 1, c\},\ \{Z_0, \alpha\},$
$\delta,\ q_0,\ Z_0,\ \{p_5,\ s_8,\ r_4,\ t_{10},\ q_{21}\})$

nedeterministické rozhodnutie, v ktorej vetve bude výpočet prebiehať

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(x, Z_0) \mid x \in \{q_1, p_1, s_1, r_1, t_1\}\}$$

δ-funckia pre vetvu akceptujúcu ucv, kde $|u| + 2 \leq |v|$

$$\begin{array}{lll}
\delta(p_1, 1, Z_0) = \{(p_2, Z_0\alpha\alpha)\} & & (2) \\
\delta(p_2, a, \alpha) = \{(p_2, \alpha\alpha)\} & a \in \{0, 1\} & (3) \\
\delta(p_2, c, \alpha) = \{(p_3, \alpha)\} & & (4) \\
\delta(p_3, 1, \alpha) = \{(p_4, \varepsilon)\} & & (5) \\
\delta(p_4, a, \alpha) = \{(p_4, \varepsilon)\} & a \in \{0, 1\} & (6) \\
\delta(p_4, a, Z_0) = \{(p_5, Z_0)\} & a \in \{0, 1\} & (7) \\
\delta(p_5, a, Z_0) = \{(p_5, Z_0)\} & a \in \{0, 1\} & (8)
\end{array}$$

Jednotlivé vetvy výpočtu definujú tieto jazyky:

- $L_1 = \{ucv \mid u, v \in 1\{0,1\}^*$, kde $|u| + 2 \leq |v|\}$

- $L_2 = \{ucv \mid u, v \in 1\{0,1\}^*$, kde $|u| + 1 = |v|$ a zároveň u nie je predchodca $v\}$

- $L_3 = \{ucv \mid u, v \in 1\{0,1\}^*$, kde $|u| = |v|$ a zároveň u a v majú rovnakú paritu$\}$

- $L_4 = \{ucv \mid u, v \in 1\{0,1\}^*$ a zároveň u, v sa odlišujú aspoň v jednom bite, ktorý ale nie je súčasťou charakteristického sufixu po sebe idúcich čísel$\}$

- $L_5 = \{ucv \mid u, v \in 1\{0,1\}^*$, kde $|u| > |v|\}$

Chceme ukázať rovnosť

$$L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 = L$$

Zrejme

$$L_i \subseteq L, \ \forall i \in \{1, \ldots, 5\}$$

potom

$$L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \subseteq L$$

Definujme L_4' takto:

$$L_4' \subseteq L_4, \ ucv \in L_4' \to |u| = |v|$$

Potom L_1, L_2, L_3, L_4', L_5 tvoria rozklad L, t.j.

$$L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4' \cap L_5 = \emptyset$$

$$L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4' \cup L_5 = L$$

Keďže $L_4' \subseteq L_4$, potom

$$L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5 \supseteq L$$