Prezentácia, Tomáš Pauditš, foja3, sada č.4, úloha č.3

Zadanie:

Zadefinujte viachlavový TM a dokážte že je ekvivalentný s jednohlavovým. Teda že pre každý k-hlavový TM M, existuje jednohlavový TM M', taký že $L(M) = L(M')$.

Definícia viachlavového TM:

Definícia 1 : *Nedeterministický viachlavový Turingov stroj (VTM) nazývame 7-ticu* $(K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F, n)$, *kde* K *je konečná množina stavov,* Σ *je abeceda vstupných symbolov,* Γ *je abeceda pracovných symbolov* $(\Sigma \subseteq \Gamma)$, $q_0 \in K$ *je počiatočný stav,* $F \subseteq K$ *je množina akceptačných stavov, n je počet hláv*

$\delta :\qquad K \times (X_i)^n \to 2^{K \times ((\{B\} \cup \Gamma\ \forall X_i = \{B\};\ \Gamma\ \forall X_i \in \Gamma) \times \{1,0,-1\})^n}, \forall i \in 1 \ldots n$

Definícia 2 : *Konfigurácia VTM je*

$$(q, \uparrow_{i_1} \ldots \uparrow_{i_k} \mathbf{B} \uparrow_{i_{k+1}} u_1 \uparrow_{i_{k+2}} \ldots u_{m-1} \uparrow_{i_{n-1}} u_m \uparrow_{i_n}),$$
$$k \in \langle 0; n \rangle,\ i_j \in 1..n,\ i_j \neq i_l, pre\ j \neq l,\ \forall j, l \in \langle 1; n \rangle,\ u_i \in \Gamma^*,\ \forall i \in \langle 1; n \rangle$$

Definícia 3 : *Krok výpočtu VTM je relácia* $\vdash$ *na konfiguráciách definovaná nasledovne :*

$$\forall \uparrow_j,\ j \in \langle 1; n \rangle :\ \forall a_j, b_j, c_j \in \Gamma \cup \{\mathbf{B}\}, p, q \in K$$

$$(q, u \uparrow_j \uparrow_{i_1} \ldots \uparrow_{i_k} a_j v) \vdash (p, u \uparrow_{i_1} \ldots \uparrow_{i_k} b_j \uparrow_j v) \iff (p, (b_i, d_i)^n) \in \delta(q, (a_i)^n) \wedge d_j = \{1\}$$
$$\forall i \in \langle 1; n \rangle, i_i \in 1..n,\ k \in \langle 0; n \rangle, u, v \in \{\{\Gamma \cup \{\uparrow_{i_{k+1}} \ldots \uparrow_{i_n}\}\}^* |\ i_r \neq i_s,\ pre\ r \neq s, \forall r, s \in \langle k+1; n \rangle\}$$

$$(q, u \uparrow_j \uparrow_{i_1} \ldots \uparrow_{i_k} a_j v) \vdash (p, u \uparrow_j \uparrow_{i_1} \ldots \uparrow_{i_k} b_j\ v) \iff (p, (b_i, d_i)^n) \in \delta(q, (a_i)^n) \wedge d_j = \{0\}$$
$$\forall i \in \langle 1; n \rangle, i_i \in 1..n,\ k \in \langle 0; n \rangle, u, v \in \{\{\Gamma \cup \{\uparrow_{i_{k+1}} \ldots \uparrow_{i_n}\}\}^* |\ i_r \neq i_s,\ pre\ r \neq s, \forall r, s \in \langle k+1; n \rangle\}$$

$$(q, ua_j \uparrow_{i_1} \ldots \uparrow_{i_l} \uparrow_j \uparrow_{i_l} \ldots \uparrow_{i_k} b_j v) \vdash (p, u \uparrow_j a_j \uparrow_{i_1} \ldots \uparrow_{i_k} c_j v) \iff (p, (c_i, d_i)^n) \in \delta(q, (b_i)^n) \wedge$$
$$d_j = \{-1\}$$
$$\forall i \in \langle 1; n \rangle, i_i \in 1..n,\ k \in \langle 0; n \rangle, u, v \in \{\{\Gamma \cup \{\uparrow_{i_{k+1}} \ldots \uparrow_{i_n}\}\}^* |\ i_r \neq i_s,\ pre\ r \neq s, \forall r, s \in \langle k+1; n \rangle\}$$

Definícia 4 : *Jazyk akceptovaný VTM je*

$$L(A)\ =\ \{w \in \Sigma\ |\ (q_0, \mathbf{B} \uparrow_1 \ldots \uparrow_n w)\ \vdash^* (q,\ \mathbf{B}u),$$
$$u \in \{\{\Gamma \cup \{\uparrow_{i_1} \ldots \uparrow_{i_n}\}\}^*\ |\ i_r \neq i_s,\ pre\ r \neq s, \forall r, s \in \langle 1; n \rangle\},\ q \in F\}$$

Dôkaz:

$L(M) \supseteq L(M')$**:**

Uvedomme si, že každý jednohlavový TM je vlastne špeciálny prípad viachlavového TM, kde počet hláv sa rovná jedna. A teda zrejme platí $L(M) \supseteq L(M')$.

$L(M) \subseteq L(M')$**:**

Ukážeme, že vieme ku každému viachlavovému TM $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F, n)$ zostrojiť jednohlavový TM $A' = (K', \Sigma', \Gamma', \delta', q_0', F')$, ktorý akceptuje rovnaké slová ako TM A.
Postup konštrukcie :

$K' = K \cup \{q_0', q_{INIT}, q_{BACK}, q_{FIND_i}, q_{CHANGE_i}, q_{BACK_i}\},\ pre \forall i \in 1 \dots n,\ \Sigma' = \Sigma, F' = F$
TM A' bude pracovať so symbolmi pracovnej abecedy Γ' v tvare A_B, kde A je znak z Γ a B je n-tica bitov, v ktorej budeme zaznamenávať polohu hláv TM A, napr. a_{10011} - znamená : na znaku a na páske, sú nastavené hlavy č. 1,4,5 (pre 5-hlavový TM).
$\Gamma = A_B,\ kde\ A \in \{\Sigma\ \cup\ \{B\}\}^*$, B sú všetky permutácie 1,0 dĺžky n.

A' na začiatku prepíše symboly vstupnej abecedy na symboly tvaru A_B, kde A sa rovná pôvodného symbolu na páske, B je n-tica nulových bitov. Prvý symbol na páske sa však nahradí symbolom A_B, kde A je pôvodný symbol, B je n-tica jednotkových bitov. Týmto sme si zaznačili, že všetky hlavy sú na prvom symbole. Toto zabezpečuje nasledovná časť δ funkcie :

$\delta'(q_0', x) = \{(q_{INIT}, x_{1\dots11}, 1)\},\ kde\ x \in \Sigma'$, kde počet 1 sa rovná n
$\delta'(q_{INIT}, x) = \{(q_{INIT}, x_{0\dots00}, 1)\},\ kde\ x \in \Sigma'$ kde počet 0 sa rovná n
$\delta'(q_{INIT}, \mathbf{B}) = \{(q_{BACK}, \mathbf{B}, 0)\}$
$\delta'(q_{BACK}, x) = \{(q_{BACK}, x, -1)\},\ kde\ x \in \Gamma'$
$\delta'(q_{BACK}, \mathbf{B}) = \{(q_0, \mathbf{B}, 1)\}$

Nasledovná časť δ funkcie, nám zabezpečí simuláciu pohybu všetkých hláv v pôvodnom TM A. Postupne jednou hlavou v A', sa budeme posúvať na po jednotlivých symboloch a budeme testovať symboly, či nie je v nich zaznačená poloha hlavy, ak áno, tak vykonáme presne to, čo vykonal pôvodný automat s jednotlivou hlavou. Toto budeme postupne opakovať pre všetky hlavy TM A. Po vykonaní, simulácie pre všetky hlavy TM A' prejde do toho istého stavu ako by prešiel pôvodný TM A.

každé pravidlo δ funcie TM A: $(p, (b_i, d_i)^n) \in \delta(q, (a_i)^n)$, nahradíme :

$\delta'(q, x) = \{(q_{FIND_1}, x, 0)\},\ kde\ x \in \Gamma'$

pre $\forall i \in 1 \dots n$:

$\delta'(q_{FIND_i}, x_{j_1 \dots j_n}) = \{(q_{FIND_i}, x_{k_1 \dots k_n}, 1)\},\ ak\ j_i = 0,\ k_l = j_l,\ pre\ \forall l \in 1 \dots n,\ kde\ x_{j_1 \dots j_n} \in \Gamma'$
$\delta'(q_{FIND_i}, x_{j_1 \dots j_n}) = \{(q_{CHANGE_i}, y_{k_1 \dots k_n}, d)\},\ ak\ j_i = 1 \wedge\ x = a_i,\ k_l = j_l,\ pre\ \forall l \in 1 \dots n,$
$\quad okrem\ k_i = 0,\ y = b_i,\ d = d_i$
$\delta(q_{CHANGE_i}, x_{j_1 \dots j_n}) = \{(q_{BACK_i}, x_{k_1 \dots k_n}, 0)\},\ k_l = j_l,\ pre\ \forall l \in 1 \dots n,$
$\quad okrem\ k_i = 1,\ kde\ x_{j_1 \dots j_n} \in \Gamma'$
$\delta(q_{CHANGE_i}, \mathbf{B}) = \{(q_{BACK_i}, B_{k_1 \dots k_n}, 0)\},\ k_l = 0,\ pre\ \forall l \in 1 \dots n,$
$\quad okrem\ k_i = 1$
$\delta'(q_{BACK_i}, x) = \{(q_{BACK_i}, x, -1)\},\ kde\ x \in \Gamma'$
$\delta'(q_{BACK_i}, \mathbf{B}) = \{(q_{FIND_{i+1}}, \mathbf{B}, 1)\}, ak\ i <> n$
$\delta'(q_{BACK_i}, \mathbf{B}) = \{(p, \mathbf{B}, 1)\}, ak\ i = n$

Akceptačné stavy sú pre oba TM rovnaké, takže TM A a aj A' akceptujú zároveň. TM A' akceptuje tie isté slová ako TM A, pretože presne simuluje výpočet TM A.