Tomáš Pauditš, sada č.4, úloha č.3

Zadanie:

Zadefinujte viachlavový TM a dokážte že je ekvivalentný s jednohlavovým. Teda že pre každý k-hlavový TM M, existuje jednohlavový TM M', taký že $L(M) = L(M')$.

Princíp jednohlavového TM:

Princíp viachlavového TM:

Definícia viachlavového TM:

Definícia 1 :

Nedeterministický viachlavový Turingov stroj (VTM) nazývame 7-ticu $(K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F, n)$, *kde* K *je konečná množina stavov,* Σ *je abeceda vstupných symbolov,* Γ *je abeceda pracovných symbolov* $(\Sigma \subseteq \Gamma)$, $q_0 \in K$ *je počiatočný stav,* $F \subseteq K$ *je množina akceptačných stavov,* n *je počet hláv a*

$\delta : \ K \times (X_i)^n \rightarrow$
$2^{K \times ((\{B\} \cup \Gamma \ \forall X_i = \{B\}; \Gamma \ \forall X_i \in \Gamma) \times \{1,0,-1\})^n, \ \forall i \in 1...n}$

Definícia 2 :

Konfigurácia VTM je

$$(q, \uparrow_{i_1} \ldots \uparrow_{i_k} \mathbf{B} \uparrow_{i_{k+1}} u_1 \uparrow_{i_{k+2}} \ldots \uparrow_{i_{n-1}} u_m \uparrow_{i_n}),$$
$$k \in \langle 0; n \rangle, \ i_j \in 1..n, \ i_j \neq i_l, pre \ j \neq l, \ \forall j, l \in \langle 1; n \rangle, \ u_i \in \Gamma^*, \ \forall i \in \langle 1; n \rangle$$

Definícia 3 : *Krok výpočtu VTM je relácia* $\vdash$ *na konfiguráciách definovaná nasledovne :*

$$\forall \uparrow_j,\ j \in \langle 1; n\rangle :\ \forall a_j, b_j, c_j \in \Gamma \cup \{\mathbf{B}\}, p, q \in K$$

$$(q, u \uparrow_j \uparrow_{i_1} \dots \uparrow_{i_k} a_j v) \vdash (p, u \uparrow_{i_1} \dots \uparrow_{i_k} b_j \uparrow_j v) \Longleftrightarrow (p, (b_i, d_i)^n) \in \delta(q, (a_i)^n) \wedge d_j = \{1\}\ \forall i \in \langle 1; n\rangle, i_i \in 1..n,\ k \in \langle 0; n\rangle, u, v \in \{\{\Gamma \cup \{\uparrow_{i_{k+1}} \dots \uparrow_{i_n}\}\}^* |\ i_r \neq i_s,\ pre\ r \neq s, \forall r, s \in \langle k+1; n\rangle\}$$

$$(q, u \uparrow_j \uparrow_{i_1} \dots \uparrow_{i_k} a_j v) \vdash (p, u \uparrow_j \uparrow_{i_1} \dots \uparrow_{i_k} b_j\ v) \Longleftrightarrow (p, (b_i, d_i)^n) \in \delta(q, (a_i)^n) \wedge d_j = \{0\}\ \forall i \in \langle 1; n\rangle, i_i \in 1..n,\ k \in \langle 0; n\rangle, u, v \in \{\{\Gamma \cup \{\uparrow_{i_{k+1}} \dots \uparrow_{i_n}\}\}^* |\ i_r \neq i_s,\ pre\ r \neq s, \forall r, s \in \langle k+1; n\rangle\}$$

$$(q, u a_j \uparrow_{i_1} \dots \uparrow_{i_l} \uparrow_j \uparrow_{i_l} \dots \uparrow_{i_k} b_j v) \vdash (p, u \uparrow_j a_j \uparrow_{i_1} \dots \uparrow_{i_k} c_j v) \Longleftrightarrow (p, (c_i, d_i)^n) \in \delta(q, (b_i)^n) \wedge d_j = \{-1\}\ \ \forall i \in \langle 1; n\rangle, i_i \in 1..n,\ k \in \langle 0; n\rangle, u, v \in \{\{\Gamma \cup \{\uparrow_{i_{k+1}} \dots \uparrow_{i_n}\}\}^* |\ i_r \neq i_s,\ pre\ r \neq s, \forall r, s \in \langle k+1; n\rangle\}$$

Definícia 4 : *Jazyk akceptovaný VTM je*

$$L(A) = \{w \in \mathbf{\Sigma} \mid (q_0, \mathbf{B}\uparrow_1 \ldots \uparrow_n w) \vdash^* (q, \mathbf{B}u),$$
$$u \in \{\{\Gamma \cup \{\uparrow_{i_1} \ldots \uparrow_{i_n}\}\}^* \mid i_r \neq i_s,\ pre\ r \neq s, \forall r, s \in \langle 1; n\rangle\},\ q \in F\}$$

Dôkaz:

$L(M) \supseteq L(M')$**:**

Uvedomme si, že každý jednohlavový TM je vlastne špeciálny prípad viachlavového TM, kde počet hláv sa rovná jedna. A teda zrejme platí $L(M) \supseteq L(M')$.

$L(M) \subseteq L(M')$**:**

Ukážeme, že vieme ku každému viachlavovému TM $A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F, n)$ zostrojiť jednohlavový TM $A' = (K', \Sigma', \Gamma', \delta', q_0', F')$, ktorý akceptuje rovnaké slová ako TM A.

Princíp konštrukcie viachlavovému TM, ktorý akceptuje rovnaké slová ako TM A :

$K' = K \cup \{q_0', q_{INIT}, q_{BACK}, q_{FIND_i}, q_{CHANGE_i}, q_{BACK_i}\},\ pre \forall i \in 1 \ldots n,\ \Sigma' = \Sigma, F' = F$
TM A' bude pracovať so symbolmi pracovnej abecedy Γ' v tvare A_B, kde A je znak z Γ a B je n-tica bitov, v ktorej budeme zaznamenávať polohu hláv TM A, napr. a_{0100} - znamená : na znaku a na páske, je nastavená hlava č. 2 (pre 4-hlavový TM).
$\Gamma = A_B,\ kde\ A \in \{\Sigma \cup \{B\}\}^*$, B sú všetky permutácie 1,0 dĺžky n.

Nasledovná časť δ funkcie prepíše symboly vstupnej abecedy na symboly tvaru A_B a vráti hlavu na prvý symbol:

$\delta'(q_0', x) = \{(q_{INIT}, x_{1...11}, 1)\},\ kde\ x \in \mathbf{\Sigma}'$, kde počet 1 sa rovná n
$\delta'(q_{INIT}, x) = \{(q_{INIT}, x_{0...00}, 1)\},\ kde\ x \in \mathbf{\Sigma}'$ kde počet 0 sa rovná n
$\delta'(q_{INIT}, \mathbf{B}) = \{(q_{BACK}, \mathbf{B}, 0)\}$
$\delta'(q_{BACK}, x) = \{(q_{BACK}, x, -1)\},\ kde\ x \in \Gamma'$
$\delta'(q_{BACK}, \mathbf{B}) = \{(q_0, \mathbf{B}, 1)\}$

Nasledovná časť nám zabezpečí simuláciu pohybu hláv v pôvodnom TM A:

každé pravidlo δ funcie TM A:
$(p, (b_i, d_i)^n) \in \delta(q, (a_i)^n)$, nahradíme :

$$\delta'(q, x) = \{(q_{FIND_1}, x, 0)\},\ kde\ x \in \Gamma'$$

pre $\forall i \in 1 \ldots n$:

$$\delta'(q_{FIND_i}, x_{j_1 \ldots j_n}) = \{(q_{FIND_i}, x_{k_1 \ldots k_n}, 1)\},$$
$$ak\ j_i = 0,\ k_l = j_l,\ pre\ \forall l \in 1 \ldots n,\ x_{j_1 \ldots j_n} \in \Gamma'$$

$$\delta'(q_{FIND_i}, x_{j_1 \ldots j_n}) = \{(q_{CHANGE_i}, y_{k_1 \ldots k_n}, d)\},$$
$$ak\ j_i = 1 \wedge\ x = a_i,\ k_l = j_l,\ pre\ \forall l \in 1 \ldots n,$$
$$okrem\ k_i = 0,\ y = b_i,\ d = d_i$$

$$\delta(q_{CHANGE_i}, x_{j_1 \ldots j_n}) = \{(q_{BACK_i}, x_{k_1 \ldots k_n}, 0)\},$$
$$k_l = j_l,\ \forall l \in 1 \ldots n,\ \ okrem\ k_i = 1,\ x_{j_1 \ldots j_n} \in \Gamma'$$

$$\delta(q_{CHANGE_i}, \mathbf{B}) = \{(q_{BACK_i}, B_{k_1 \ldots k_n}, 0)\},$$
$$k_l = 0,\ pre\ \forall l \in 1 \ldots n,\ \ okrem\ \ k_i = 1$$

$$\delta'(q_{BACK_i}, x) = \{(q_{BACK_i}, x, -1)\},\ kde\ x \in \Gamma'$$
$$\delta'(q_{BACK_i}, \mathbf{B}) = \{(q_{FIND_{i+1}}, \mathbf{B}, 1)\}, ak\ i <> n$$
$$\delta'(q_{BACK_i}, \mathbf{B}) = \{(p, \mathbf{B}, 1)\}, ak\ i = n$$