Prezentácia z Formálnych jazykov a automatov, úloha 5/2

Tomáš Potok

March 19, 2001

1 Zadanie:

Úlohou je zostrojiť TS, ktorý počíta funkciu:

$$f(n) = n^2 + n + 3$$

2 Riešenie:

$T = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$
$K = \{q_0, q_3, q_4, q_{41}, q_{42}, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9\}$
$\Sigma = \{a\}$
$\Gamma = \{a, a^*, a^{'}, a^{*'}, \#\}$
$F = \{q_{10}\}$
δ :

inicializácia
prejdeme na koniec a za vstup zapíšeme zarážku #
$\delta(q_0, x) = \{(q_0, x, 1)\}, x \in \Gamma$
$\delta(q_0, \mathbf{B}) = \{(q_5, \#, 0)\}$
vonkajší cyklus
inkrementujeme counter vo vonkajšom cykle
$\delta(q_3, x) = \{(q_4, x^*, 0)\}$
alebo, ak sme na konci, vyskocime z neho
$\delta(q_3, \#) = \{(q_7, a, 0)\}$
vnútorný cyklus
vrátime sa na začiatok po **B**, alebo po $a^{'}$
$\delta(q_4, x) = \{(q_4, x, -1)\}, x \in \{a, a^*, \#\}$
$\delta(q_4, x) = \{(q_{41}, x, 1)\}, x \in \{\mathbf{B}, a^{'}\}$
inkrementujeme counter vnútorného cyklu
$\delta(q_{41}, a) = \{(q_{42}, a^{'}, 0)\}$
pokiaľ nie sme na konci
$\delta(q_{41}, \#) = \{(q_5, \#, 0)\}$
presunieme sa na koniec pásky a zaznačíme symbol a

$\delta(q_{42},x) = \{(q_{42},x,1)\}, x \in \Gamma$
$\delta(q_{42},\mathbf{B}) = \{(q_4,a,0)\}$
vraciame sa až na začiatok po $\mathbf{B}$, pričom odznačíme '.
$\delta(q_5,x) = \{(q_5,x,-1)\}, x \in \Gamma - \{a^{'}\}$
$\delta(q_5,x^{'}) = \{(q_5,x,-1)\}, x \in \{a,a^*\}$
$\delta(q_5,\mathbf{B}) = \{(q_6,\mathbf{B},1)\}$
prejdeme cez všetky znaky a^*
$\delta(q_6,a^*) = \{(q_6,a^*,1)\}$
a znova opakujeme vonkajší cyklus
$\delta(q_6,x) = \{(q_3,x,0)\}, x \in \Gamma - \{a^*\}$
ideme na koniec
$\delta(q_7,x) = \{(q_7,x,1)\}, x \in \Gamma$
a prepíšeme koncový $\mathbf{B}$ na a,
$\delta(q_7,\mathbf{B}) = \{(q_8,a,1)\}$
a ďalší tiež.
$\delta(q_8,\mathbf{B}) = \{(q_9,a,0)\}$
všetky znaky z Γ zameníme za a
$\delta(q_9,a) = \{(q_9,a,-1)\}$
$\delta(q_9,a^*) = \{(q_9,a,-1)\}$
$\delta(q_9,a^{'}) = \{(q_9,a,-1)\}$
$\delta(q_9,a^{*'}) = \{(q_9,a,-1)\}$
$\delta(q_9,\mathbf{B}) = \{(q_{10},\mathbf{B},0)\}$

Dôkaz:

Rozdelíme si δ - funkciu na dva "podprogramy", popíšeme si ich funkciu, a najskôr dokážeme správnosť každého z nich.

1. Stavy q_4, q_{41}, q_{42}označíme C_1
2. Stavy q_5, q_6, q_3 označíme C_2

C_1 :

Dokážeme, že cyklus C_1 prekopíruje znaky pred # na koniec.

TS je v počiatočnej konfigurácii $(q_4, w\#u, n), u, w \in \Gamma^*$. (do $q_4$sme sa dostali po prechode z q_0, q_5, q_6, q_3)

IP: Po k prechodoch cyklom C_1je TS v konfigurácii:

$(q_4, x^{'k}x^l\#ux^k, m)$,pričom $k + l = |w|$, $x \in \{x, x^*\}$

Dôkaz: MI vzhľadom na počet prechodov cyklom.

1. $k = 0$, slovo $x^l\#u$ vyhovuje podľa zadania
2. $k = n$ platí, ukážeme, že platí aj pre $n + 1$. Podľa IP sme v konfigurácii $x^{'n}x^l\#ux^nq_4$. V q_4 sa presúvame doľava až po najbližší $\mathbf{B}$, alebo $x^{'}$. Následne sa v stave q_{41}nasledujúci znak po $x^{'}$, prípadne po $\mathbf{B}$ označí '. V q_{42} sa presúvame na koniec a prepíšeme posledný $\mathbf{B}$ na a. Z q_{42} sa znova dostaneme do q_4. Teraz je TS v konfigurácii $(q_4, x^{'n+1}x^{l-1}\#ux^{n+1}, m)$, čiže IP platí aj pre $n + 1$.

Ak $|w| = m$, tak po m prechodoch cyklu sme skopírovali slovo w na koniec pásky.
$C_{2:}$

Dokážeme, že cyklus C_2 na koniec prekopíruje $|w|^2$ znakov.

TS je v počiatočnej konfigurácii $(q_6, w\#, m), w \in \Gamma^*$. (do ktorej sme sa dostali z q_0 cez q_5, kde sme pridali na koniec znak $\#$ - zarážku)

IP: Po k prechodoch cyklom C_2 je TS v konfigurácii:

$(q_6, x^{*k} x^l \# x^{k|w|}, m)$,pričom $k + l = |w|$, $x \in \{x, x^{'}\}$

Dôkaz: MI vzhľadom na počet prechodov cyklom.

1. $k = 0$, slovo $x^l\#$ vyhovuje podľa zadania

2. $k = n$ platí, ukážeme, že platí aj pre $n + 1$. Podľa IP sme v konfigurácii $q_6 x^{*n} x^l \# x^{n|w|}$. V q_6 prejdeme cez všetky znaky $x^*, x \in \{x, x^{'}\}$ a prvý znak bez * označíme hviezdičkou. Následne automat prejde do stavu q_4 a v tomto stave (ako sme už dokázali v prvom bode) prekopírujeme znaky, ktoré sú pred znakom $\#$ na koniec pásky. Po skončení cyklu C_1 prejdeme do stavu q_5, kde odznačíme apostrofy a presunieme sa na začiatok pásky a prejdeme do q_6. Teraz je TS v konfigurácii $(q_6, x^{*n+1} x^{l-1} \# x^{(n+1)|w|}, m)$, čiže IP platí aj pre $n + 1$.

Ak $|w| = m$, tak po m prechodoch cyklu sme skopírovali na koniec pásky m^2 znakov.

Teraz ukážeme, že TS naozaj počíta zadanú funkciu.

Ak TS skončil v akceptačnom stave q_{10}, musel prejsť cez stavy q_9 (kde sme všetky znaky z Γ zamenili za znak a), q_8 a q_7 , v ktorých sme pridali na koniec pásky 2 znaky a. Do stavu q_7 sme sa mohli dostať len cez stav q_3, pričom sme zamenili znak $\#$ za a. Tým sme pásku predĺžili o reťazec dĺžky 3. Zo stavu q_3 sme sa do q_7 mohli dostať len za predpokladu, že sme načítali znak $\#$ v q_3 (ukončenie vonkajšieho cyklu), čomu ale muselo predchádzať načítanie znaku $\#$ v q_{41}(ukončenie vnútorného cyklu), čo ale znamená, že TS pokračoval ďalej z q_{41} do stavu q_5 a následne do q_6. Dokázali sme už však, že v tom prípade na páske muselo už byť pridaných $|w|^2$ znakov. Takže na páske sa nachádza pôvodných $|w|$ znakov, $|w|^2$ znakov pridaných v cykloch a 3 znaky pridané v posledných troch stavoch. Tým sme dokázali, že TS T počíta zadanú funkciu.