Uloha 8.4, Vladimir Roth, FOJA2

a) Ukazem ze vieme najst k danej bezkontextovej gramatike regularnu gramatiku. Vyuzijem pupmovaciu lemu pre bezkontextove jazyky. Nech p,q su konstanty z pumpovacej lemy. Potom ak z patri do L(G)a $|z|$>p, z sa da napisat ako uvwxy, kde pre kazde i $\geq$0 $wv^iwx^iy \in$ L(G). Taktiez $|v| + |x| > 0$. Teda ak v L(G) existuje slovo, ktore ma dlzku vacsiu alebo rovnu p , potom L(G) je nekonecny. Teda dostavame dva pripady.

Neexistuje slovo dlhsie ako p $\Rightarrow$ vieme najst regularny jazyk prisluchajuci bezkontextovemu. Napriklad taky ze v prepisovacom pravidle zo σ pojde sipka na vsetky slova ktore jazyk generuje.

Existuje slovo dlhsie ako p, teda L(G) je nekonecny: Teda v L(G) existuju slova lubovolne velkej dlzky, a teda aj slovo dlhsie ako p+q. Toto sa da napisat v tvare uvwxy, kde $|vwx|$$\leq$q, $|v| + |x| > 0$ a $uv^iwx^iy \in$ L pre $\forall i \geq 0$. Specialne, uwy patri do L a $|uwy| < |uvwxy|$. Taktiez $|uwy| > p$. Ak $|uwy| > p + q$, opakujeme postup , az kym nenajdeme slovo v L dlzky l, pricom $p < l <= p + q$. Vzhladom na to ze vieme ucit, ci nejake dane slovo patri do daneho bezkontextoveho jazyka a slov dlzky medzi p a p+q je konecny pocet, teda tvoria akusi bazu z ktorej mozeme pumpovat ostatne slova. Teda pre vsetky slova w, kde p<$|w|$$\leq$p+q plati , ze w=uvwxy a $uv^iwx^iy \in$ L. Kedze sa vsak pohybujeme na jednopismenkovou abecedou , mozeme prehodit v a x na koniec slova a dostavame $uwy(vx)^i \in$ L. Teda pre tieto slova vytvorime pravidla

A $\rightarrow$ uwy | uwyB

B $\rightarrow$ vx | vxB.

Tieto pravidla splnaju podmienku regularneho jazyka a teda sme nasli regularny jazyk prisluchajuci danemu bezkontextovemu jazyku. Teda bezkontextovy jazyk nad 1 pismenkovou abecedou je regularny.

b)

b1) Kedze L1 je podla a) regularny a L2 je bezkontextovy vieme podla jednej vety ze ich prienik je bezkontextovy jazyk. Mame zistit prazdnost prieniku a teda, ci vieme povedat, ze L1 $\cap$ L2=0, kde L1 $\in$ R , L2 $\in L_{CF}$, $\Rightarrow$ (L1 $\cap$ L2) $\in L_{CF} = 0$ a teda mame zistit ci je rozhodnutelna prazdnost bezkontextoveho jazyka, co je podla jednej vety problem rozhodnutelny.

b2) Podobne ako b1). L1,L2 $\in$ R a vieme aj ze (L1 $\cap$ L2) $\in$ R co je podmnozina L_{CF} a teda mozeme aj o (L1 prienik L2) povedat ze $\in L_{CF}$, a teda dostavame tu istu ulohu ako v b1) , ze mame zistit prazdnost bezkontextoveho jazyka , co je problem rozhodnutelny.