Prezentácia z predmetu
Formálne jazyky a automaty

Vladimír Tužinský

Definícia 1: Budeme hovoriť, že jazyk L (resp. automat A, kde $L = L(A)$) akceptuje hrany grafu G, ak sú všetky slová z L tvaru

$$u\#v; u, v \in \{0, 1\}^*$$

a

$$u\#v \in L \leftrightarrow (u', v') \in E(G),$$

kde u, v sú binárne kódy vrcholov u', v' grafu G.

Príklad: Majme graf $G = (V, E)$, kde

$$V = 0, 1, 2, 3 \text{ a } E = (0, 2), (2, 1), (1, 3).$$

Potom jazyk

$$L = \{'0\#10',' 10\#1',' 1\#11'\}$$

akceptuje hrany grafu G.

Definícia 2: Jazyk L bude patriť do triedy $\underline{\mathcal{L}_G}$, ak existuje orientovaný graf, ktorého hrany L akceptuje.

Definícia 3: Jazyk L má vlastnosť $\underline{S}$, ak v orientovanom grafe, ktorého hrany L akceptuje, existuje $0, 1 - cesta$.

Poznámka 1: Ak L akceptuje hrany nejakého grafu, akceptuje hrany nekonečne veľa grafov s ľubovoľným počtom izolovaných vrcholov. Keďže izolované vrcholy nemajú vplyv na cesty v grafe, budeme túto skutočnosť ignorovať.

Poznámka 2: $\emptyset \in \mathcal{L}_G$, ale $\emptyset \notin S$.

Úloha: Je vlastnosť S pre triedu $\mathcal{L}_G$ rozhodnuteľná?

Riešenie: Sporom ukážeme, že príslušnosť jazyka $L \in \mathcal{L}_G$ do S je nerozhodnuteľná. To znamená, že sa nedá z kódu ľubovoľného stroja akceptujúceho jazyk z $\mathcal{L}_G$ určiť, či v grafe, ktorého hrany automat akceptuje, existuje $0, 1 - cesta$. Ak by totiž bola vlastnosť S rozhodnuteľná, existoval by deterministický TS pre univerzálny jazyk $L_u = \{u\#v | v \in L(A_u)\}$, ktorý vždy zastaví. Z toho by však vyplývala rozhodnuteľnosť príslušnosti slova do jazyka pre $\mathcal{L}_{RE}$, čo je známy nerozhodnutelný problém.

Dôkaz: Predpokladajme, že vlastnosť S je pre $\mathcal{L}_G$ rozhodnuteľná. Teda existuje deterministický TS M_S, ktorý akceptuje kódy TS s vlastnosťou S, ktorý vždy zastaví. Majme jazyk $L \in S$ (napr. $\{'0\#1'\}$) definovaný strojom M_L, ktorý ho akceptuje. Definujme M(w) ako stroj, ktorý akceptuje L, ak $w \in L(M)$, a $\emptyset$, ak $w \notin L(M)$.

Na tomto mieste je dôležité uvedomiť si dve skutočnosti:

1. $L(M(w)) = \emptyset$ alebo $L(M(w)) = L$. Záleží to iba od toho, či w patrí $L(M)$ alebo nie. Zároveň, ako som už skôr uviedol, $L \in S$, ale $\emptyset \notin S$.
2. Aj L aj $\emptyset$ patria do $\mathcal{L}_G$, takže $L(M(w)) \in \mathcal{L}_G$ a teda môžeme kód $M(w)$ dať na vstup rozhodovaciemu stroju M_S.

DTS B dostane na vstup kód stroja M a slovo w a po skončení výpočtu nechá na páske kód stroja $M(w)$. Zostrojíme teraz TS C, ktorý bude pracovať takto: Na vstup dostane kód stroja M a slovo w. Simuláciou stroja B vstup prevedie na kód stroja $M(w)$ a na tomto vstupe bude simulovať stroj M_S.

Ak M_S akceptuje kód stroja $M(w)$, potom jazyk $L(M(w))$ má vlastnosť S. Z toho vyplýva, že $L(M(w)) = L$, takže $w \in L(M)$. Ak M_S neakceptuje $<M(w)>$, tak $L(M(w)) \notin S$, čo znamená, že $L(M(w)) = \emptyset$, takže $w \notin L(M)$. Ako vidno, TS C akceptuje vstup $<M>, w$ práve vtedy, keď, $w \in L(M)$. Takisto, keďže B aj M_S sú deterministické a vždy zastavia, aj C je deterministický a vždy zastaví. Takže sme dospeli ku sporu, pretože ak by takýto stroj existoval, príslušnosť slova do jazyka by bola pre $\mathcal{L}_{RE}$ rozhodnuteľná.