FoJa - Prezentácia 20.3.01, Úloha 3.4, Vladimír Wiedermann

Zadanie:
Majme daný LBA A nad abecedou $\{a, b\}$. Zostrojme LBA A', taký že $L(A') = Shuffle(L(A)), c^*)$. Zároveň nesmie A' pri simulácii meniť políčko na páske, na ktorom je symbol c.

Riešenie:
Riešenie založíme na myšlienke pamätať si v stave aj smer. Čo nie je až taký problém, pretože máme iba 3 rôzne smery a teda počet stavov sa nám zväčší maximálne 3 krát.

Teda formálne:
Majme pôvodný automat

$$A = (K, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$$

pričom

$$\begin{aligned} K &= \{g_0, \ldots, g_k\} \\ \Sigma &= \{a, b\} \end{aligned}$$

Náš nový automat bude

$$A' = (K', \Sigma', \Gamma', \delta', q_0', F')$$

pričom

$$\begin{aligned} K' &= \{q_{i_l}, q_i, q_{i_r}\} && \text{pre } q_i \in K \\ \Sigma' &= \{a, b, c\} \\ \Gamma' &= \Gamma \cup \{c\} \\ F' &= \{q_{i_l}, q_i, q_{i_r}\} && \text{pre } q_i \in F \end{aligned}$$

Funkcia δ' musí namiesto každého pravidla z delta obsahovať pravidlo, ktoré posiela ako výstupnú hodnotu namiesto stavu q_i jeden zo stavov q_{i_l}, q_i, q_{i_r}. Toto pravidlo ale musí počúvať na 3 rôznych konfiguráciach, takže formálne zapísané:

$$\begin{aligned} \delta(q_j, ch) &= \{(q_i, ch', x), ..\} && \text{pre } x \in \{-1, 0, 1\}; \quad ch, ch' \in \Sigma \\ &\downarrow \\ \delta'(q_j, ch) &= \begin{cases} \{(q_{i_l}, ch', -1)\} & \text{pre } x = -1 \\ \{(q_i, ch', 0)\} & \text{pre } x = 0 \\ \{(q_{i_r}, ch', +1)\} & \text{pre } x = +1 \end{cases} \end{aligned}$$

Rovnaké pravidlá δ' vytvoríme aj pre $\delta'(q_{j_l}, ch)$ a $\delta'(q_{j_r}, ch)$ a plus pridáme pravidlá na preskakovanie znakov c

$$\begin{aligned} \delta'(q_0', c) &= \{(q_{0_r}, c, 1)\} && && (1) \\ \delta'(q_0', x) &= \{(q_0, x, 0)\} && \text{pre } x \in \{a, b\} && (2) \\ \delta'(q_{i_l}, c) &= \{(q_{i_l}, c, -1)\} && \text{pre } q_{i_l} \in K && (3) \\ \delta'(q_{i_r}, c) &= \{(q_{i_r}, c, +1)\} && \text{pre } q_{i_r} \in K && (4) \end{aligned}$$

Dôkaz: $L(A') = Shuffle(L(A), c^*)$

<u>$Shuffle(L(A), c^*) \subseteq L(A')$</u>
Mat. indukciou na počet krokov výpočtu ukážeme, že pre každý výpočet v LBA A existuje práve jeden výpočet aj v LBA A', ktorý končí v ekvivalentnom stave a po odmyslení znakov c aj na rovnakej pozícii na páske.

Poznámka: Pre stav q_i sú ekvivalentné stavy q_{i_l}, q_i, q_{i_r}.

pre $n = 1$:

LBA A môže vykonať len krok použitím pravidla q_0. Ekvivalentný výpočet v LBA A' bude vyzerať nasledovne:

Najskor použijeme (podľa znaku na páske) jedno z pravidiel $(1), (2)$. Ak bol na vstupe znak a (alebo b), tak použijeme pravidlo (2) - z miesta sa ani nepohneme a potom nedeterministicky simulujeme jeden krok, rovnaký ako v LBA A.

Ak bolo na vstupe c, tak použijeme pravidlo (1) a následne po ňom dostatočne veľa krát pravidlo (4) až dokým nenarazíme na iný znak na páske, ako c. Potom na ňom nasimulujeme prvý krok LBA A.

Výsledkom teda je, že A' skončí v ekvivalntnom stave ako A a aj na rovnakom mieste na páske (odmysliac znaky c).

$n \to n+1$:

Nech teda LBA A prešiel n krokov a nachádza sa v stave q_i. Z neho sa potom $(n+1)$.ím krokom dostane do nejakého stavu q_j. Ekvivalentný výpočet v LBA A' bude vyzerať nasledovne:

Automat A' sa teda nachádza v nejakom stave q_i (al. q_{i_l}, q_{i_r}). Z neho by sa mal dostať do stavu q_j (al. q_{j_l}, q_{j_r}). Na vstupe môže mať len znak a, alebo b a teda sa nedeterministycky rozhodne rovnako, ako A. Po tomto kroku sa ale môže nachádzať nad znakom c - teda sa pounul buď do ľava, alebo do prava a nachádza sa v stave q_{j_l}, al. q_{j_r}.

Ak má potom v novej polohe na vstupe znak c, tak použijeme jedno z pravidiel (3) al. (4), ktoré po vhodnom počte aplikovaní prejde celý úsek so znakmi c a nájde prvý znak a alebo b.

Teda znovu A' ostane v stave ekvivalentnom k A a aj na rovnakom mieste na páske (odmysiac znaky c).

Teda pre kazdy krok a stav v A existuje ekvivalentný stav a poloha v A'.

$\underline{L(A') \supseteq Shuffle(L(A), c^*)}$

Kroky výpoçtu LBA A' nasekáme do nejakých blokov (zložených z viacerých krokov, kt. vždy nasledujú za sebou) a ukážeme, že pre každý takýto blok existuje krok v LBA A, ktorý skončí v ekvivalentnom stave a na ekviv. mieste na páske.

Najskôr si zavedme pojem blok krokov.
Blok začina tým, že na vstupnej páske je znak a al. b a A' sa nachádza v nejakom stave q_i. Z tejto konfigurácie použije nejaké pravidlo $delta'$ funkcie a dostane sa do stavu q_j (al. q_{j_i}, al. q_{j_r}), pričom ak skončil v jednom zo stavov q_{j_l}, q_{j_r}, musel posunúť čítaciu hlavu. Ak sa teraz na vstupe nachádza znovu znak a alebo b, bol tento krok aj posledným krokom bloku. Ak sa na vstupe nachádza c, môžme použiť len pravidlo (3) (resp. (4)) dostatočný počet krát, až dokým nemáme na vstupe a al. b. Použitie tohoto pravidla je jednoznačné a teda je tým jednoznačne definovaný aj blok krokov.

Este zavedme pojem nultý blok. Tento blok je buď prázdny, alebo sa skladá z použitia pravidla (1) a viacnásobného aplikovania pravidla (4) - teda je tiež definovaný jednoznačne.

Takže mat. indukciou na počet blokov v LBA A'.

pre $n = 1$:

V A' sa udeje to, že ak bol na vstupe ako prvý znak c, vykoná sa nultý blok a po ňom nejaký prvý blok. K nultému bloku krok výpv ctu v A neexistuje, čo nám však nevad´
i , lebo abeceda LBA A neobsahuje znak c. K prvému bloku (ak existuje) ale v LBA A už kroky výpočtu existujú a z nich sa teda nedeterministicky rozhodneme, ktorý použijeme,

pričom je to ten, z ktorého pri konštrukcii vzniklo prvé pravidlo prvého bloku LBA A'. Po vykonaní prvého bloku v A' sme si istí, že automat buď vykonal len 0.tý blok a teda na vstupe neexistujú znaky A a ak vedel A akceptovať prázdne slovo, vie to aj tento. Ak teda A' vykonal prvý blok, určite skončil nad znakom a al. b.

$n \rightarrow n+1$:

LBA A' sa nachádza nad znakom a al. b. Z tejto konfigurácie sa môžme dostať použitím kroku, ktorý vyzerá nasledovne:
Použije sa pravidlo δ' funkcie odvodené z δ a po ňom ak sa hlava dostala nad znak c použijeme opakovane pravidlo (3) (al. (4)). Až dokým nenájdeme znak a al. b (alebo sa nezasekneme). Pre tento krok ex. v A krok výpoçtu realizovaný tým pravidlom, z ktorého sme odvodili krok výpočtu v δ' funkcii. Ak by sa po našom bloku krokov A' zasekol musí sa zaseknúť aj A, lebo by prišiel na začiatok, alebo koniec pásky.

Teda platí, že $L(A') = Shuffle(L(A), c^*)$.