Sada úloh na cvičenie 2

Definície:

Substitúcia je zobrazenie S, určené abecedou Σ a jazykom L_x pre každé x zo Σ. Obrazom slova $w = w_1 w_2 \dots w_n$ v substitúcií S bude jazyk $S(w) = L_{w_1} L_{w_2} \dots L_{w_n}$. (Neformálne: Každé písmeno slova nahradíme nejakým slovom z príslušného jazyka, a to všetkými možnými spôsobmi.) Obraz jazyka L v substitúcií S bude jazyk $S(L) = \bigcup_{w \in L} S(w)$.

Ak sú všetky jazyky L_x regulárne (bezkontextové, ...), hovoríme, že substitúcia je regulárna (bezkontextová, ...)

---

1. Nech L_1, L_2 sú rekurzívne vyčísliteľné jazyky, pričom ich zjednotenie aj prienik sú rekurzívne jazyky. Potom aj L_1, L_2 sú rekurzívne. Dokážte alebo vyvráťte.

2. Zodpovedzte aspoň 2 otázky:
   a) Je rozhodnuteľné, či daný det. konečný automat A akceptuje slovo, ktorého dĺžka je mocnina 2?
   b) Je rozhodnuteľné, či daný LBA A akceptuje dané slovo w?
   c) Je rozhodnuteľné, či daný TS A akceptuje prázdne slovo?

3. Zvoľte si netriviálny (najlepšie náhodný) deterministický konečný automat s aspoň 4 stavmi. Postupom z dôkazu Kleeneho vety zostrojte jazyk, ktorý tento automat akceptuje.

4. Zostrojte čo najjednoduchší príklad relácie na $\{a, b\}^*$, ktorá bude:
   a) reláciou ekvivalencie konečného indexu, ale nie sprava invariantná
   b) sprava invariantnou reláciou, ktorá nebude reláciou ekvivalencie
   c) sprava invariantnou reláciou ekvivalencie, ale nie konečného indexu
   d) to isté, ale navyše musí byť zjednotením konečne veľa jej tried ekvivalencie jazyk, ktorý nebude ani bezkontextový
   Ak máte dojem, že niektorá podúloha nemá riešenie, zdôvodnite.

5. Z regulárneho jazyka kontextovou (nevymazávajúcou) substitúciou dostaneme kontextový jazyk. Dokážte pomocou LBA. (Uveďte aj delta-funkciu.)

6. Nech P je jazyk nad abecedou $\{0, \dots, 9, +\}$, pričom P obsahuje práve tie slová, ktoré zodpovedajú korektným matematickým výrazom s výsledkom 7. Nech Q je jazyk všetkých korektných výrazov nad abecedou $\{0, \dots, 9, +, \cdot, (,)\}$. Existuje bezkontextová substitúcia S_1 taká, že $S_1(P) = Q$? Existuje regulárna substitúcia S_2 taká, že $S_2(Q) = P$?

7. Pomocou Myhill-Nerodovej vety ukážte, že jazyk $\{w \mid w = w^R\}$ nie je regulárny.

8. Majme jazyk $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^* \ \wedge \ w \text{ neobsahuje podslovo } aa\}$. Ako (presne!) vyzerá jemu prislúchajúca relácia R_L z Myhill-Nerodovej vety?