Sada úloh na cvičenie 3

Definície:

Substitúcia je zobrazenie S, určené abecedou Σ a jazykom L_x pre každé x zo Σ. Obrazom slova $w = w_1 w_2 \dots w_n$ v substitúcií S bude jazyk $S(w) = L_{w_1} L_{w_2} \dots L_{w_n}$. (Neformálne: Každé písmeno slova nahradíme nejakým slovom z príslušného jazyka, a to všetkými možnými spôsobmi.) Obraz jazyka L v substitúcií S bude jazyk $S(L) = \bigcup_{w \in L} S(w)$.

Nech S je substitúcia. Potom *inverzná substitúcia* S^{-1} je nasledovné zobrazenie: Obrazom slova w bude jazyk $S^{-1}(w) = \{u | w \in S(u)\}$. (Neformálne: je to jazyk tých slov u, ktorých obraz v S obsahuje w.) Obrazom jazyka L bude jazyk $S^{-1}(L) = \bigcup_{w \in L} S^{-1}(w)$.

Ak sú všetky jazyky L_x regulárne (bezkontextové, ...), hovoríme, že substitúcia a príslušná inverzná substitúcia sú regulárne (bezkontextové, ...)

---

1. Sú regulárne jazyky uzavreté na inverznú regulárnu substitúciu? Rozhodnite a dokážte.
2. Nech L je ľubovoľný jazyk, S regulárna substitúcia. Porovnajte jazyky L, $S(S^{-1}(L))$ a $S^{-1}(S(L))$ (teda pre každú dvojicu rozhodnite, aký je medzi prísušnými jazykmi vzťah).
3. Dokážte, že ku každému A-prekladaču existuje ekvivalentný, ktorý v každom kroku prečíta aj zapíše najviac 1 písmeno.
4. Dokážte, že ku každému homomorfizmu h (zo slov nad $Sigma_1$ do slov nad $Sigma_2$) existujú A-prekladače A_1, A_2 také, že:
   – pre všetky jazyky L nad abecedou $Sigma_1$ platí $h(L) = A_1(L)$
   – pre všetky jazyky L nad abecedou $Sigma_2$ platí $h^{-1}(L) = A_2(L)$.
   Zdôvodnite, či analogické tvrdenie platí aj pre regulárne substitúcie.
5. Dokážte, že ku každému regulárnemu jazyku R nad abecedou $\{a, b\}$ existujú A-prekladače A_1, A_2, také, že pre všetky jazyky L nad abecedou $\{a, b\}$ platí $L \cap R = A_1(L)$, $L - R = A_2(L)$.
6. Zostrojte A-prekladač, ktorý preloží jazyk L_1 dobre uzátvorkovaných výrazov nad abecedou $\{\ (,), [,]\ \}$ na jazyk $L_2 = \{w \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ alebo dokážte, že sa to nedá.
7. Definujte TS so vstupnou páskou (len na čítanie) a k pracovnými páskami. Ukážte, že takýto TS je ekvivalentný so štandardným. (Nemusíte uvádzať kompletnú delta-funkciu stroja, stačí dostatočne detailný popis, ako ju zostrojiť.)
8. Zostrojte TS, ktorý keď spustíme na slove $\#u\#v\#w\#$, tak:
   – ak u nie je podslovom w, neakceptuje
   – ak u je podslovom w, prepíše pásku tak, aby na konci ostalo na páske slovo $\#u\#v\#w'\#$ (pričom w' vznikne z w tak, že niektorý výskyt slova u nahradíme slovom v) a akceptuje
   Váš TS môže zapisovať blanky.