Príklady na rekurencie

1. Riešte Hanojské veže s obmedzením, že sa nemôžu prenášať priamo disky z A na B a z B na A, t.j. každý ťah musí byť buď z tyče alebo na tyč C. Nájsť najkratšiu postupnosť ťahov, ktorou prenesieme vežu z A na B. (Rekurentný vzťah a jeho riešenie.)

2. Dvojitá Hanojská veža má z disku každej veľkosti dva kusy. Pravidlá prenášania sú rovnaké ako v pôvodnom hlavolame, navyše môžme položiť na seba aj dva disky rovnakej veľkosti. Aký je minimálny počet presunov potrebný na prenesenie veže z A na B a) ak sú disky rovnakej veľkosti nerozlíšiteľné, b) ak sú rozlíšiteľné.

3. Riešte rekurentnú rovnicu: $Q_0 = \alpha$, $Q_1 = \beta$, $Q_n = (1 + Q_{n-1})/Q_{n-2}$ pre $n > 1$. Predpokladáme, že $Q_n \neq 0$ pre všetky $n \geq 0$.

4. Pri Vennových diagramoch 3 kružnice môžu ohraničovať 8 rôznych oblastí. Môžu 4 kružnice ohraničovať 16 rôznych oblastí?

5. Niekedy je možné použiť indukciu späť dokázaním, že z n vyplýva $n-1$ a naopak. Napríklad, uvažujme tvrdenie

$$P(n) : x_1 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n, \text{ if } x_1, \dots, x_n \geq 0.$$

   Je to zrejme pravda pre $n = 2$.
   a) Dokážte, že $P(n)$ implikuje $P(n-1)$ pre $n > 1$ voľbou $x_n = (x_1 + \cdots + x_{n-1})/(n-1)$.
   b) Ukážte, že $P(n)$ a $P(2)$ implikuje $P(2n)$.
   c) Vysvetlite, prečo toto všetko implikuje, že $P(n)$ platí pre všetky n.

6. Na aký najväčší počet oblastí môžme rozdeliť rovinu n (ostrouhlými) výsekmi.

7. Koľko najviac je ohraničených oblastí v rovine, ktoré dostaneme umiestnením n priamok v rovine?

8. Nech $H_n = J_{n+1} - J_n$, kde J_n odpovedá značeniu podľa Jozefovej úlohy. Z rovníc pre J_n dostávame $H(2n) = 2$ a $H(2n+1) = 2H(n) - 2$, pre všetky $n \geq 1$. To teda vyzerá, že sme schopní dokázať $H(n) = 2$ pre všetky n, indukciou podľa n. Kde je chyba?

Včeličkové príklady na voľné chvíle.

9. Odvoďte v Jozefovej úlohe vzťah pre predposledného vypadávajúceho.