Riešenie rekurentných rovníc, rýchlosť rastu funkcie

(11. októbra 1999)

Riešte nasledujúce rekurentné rovnice a urobte skúšku správnosti:

1. $u_n + u_{n-1} - u_{n-2} - u_{n-3} = 0$ pre $n \geq 3$ s inicializačnými podmienkami $u_0 = 0$, $u_1 = -3$, $u_2 = 2$.
2. $u_n + 2u_{n-1} - 11u_{n-2} - 12u_{n-3} + 36u_{n-4} = 0$ pre $n \geq 4$ s inicializačnými podmienkami $u_0 = 2$, $u_1 = -9$, $u_2 = 41$, $u_3 = -205$.
3. $u_n - 2u_{n-1} - 5u_{n-2} + 6u_{n-3} = 0$ pre $n \geq 3$ s inicializačnými podmienkami $u_0 = 3$, $u_1 = -1$, $u_2 = 17$.
4. $f(1) = 2$, $f(2n) = 2f(n) + 2$, $f(2n+1) = 2f(n) + 2$ pre $n \geq 1$.
5. $T(1) = 1$, $T(n) = 2T(n-1) + n$ pre $n \geq 2$.

6. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich odhadov sú správne a ktoré nie:
   - $10n^2 + 9 = O(n)$
   - $n^{2^n} + 6 \cdot 2^n = \theta\left(2^{2^n}\right)$
   - $5n^2 - 6n = \theta(n^2)$
   - $\frac{n^2}{\log n} = \theta(n^2)$
   - $\frac{6n^3}{(\log n + 1)} = O(n^3)$
   - $33n^3 + 4n^2 = \Omega(n^3)$
   - $n! = O(n^n)$
   - $n! = \Omega(2^n)$
   - $2n^2 2^n + n \log n = \theta(n^2 2^n)$
   - $n^{1.001} + n \log n = \theta(n^{1.001})$
   - $\sum i = \theta(n^2)$
7. Zaraďte do nasledujúcej postupnosti fciu: $e^{\sqrt{\log n}}$:

$$1 \preceq \log\log n \preceq \log n \preceq n^{\varepsilon} \preceq n^{c} \preceq n^{\log n} \preceq c^n,$$

   kde $0 < \varepsilon < 1 < c$.

Usporiadajte podľa rýchlosti rastu:

8. $\sqrt{n}\log^2 n, n, 5, n^n, \log n, \sqrt{n}, \left(\frac{3}{2}\right)^n, n, \log\log n, \left(\frac{1}{3}\right)^n, \log^2 n, \frac{n}{\log n},$
9. $n^2, n\ln n, (\ln n)^{\ln n}, (\ln\ln n)^{\ln n}, n2^{\ln\ln n}, (\ln n)^{\ln\ln n}, ne^{\sqrt{\ln n}}, n^{1+\frac{1}{\ln\ln n}}, n^{1+\frac{1}{\ln n}}$
10. Aký je význam nasledujúcich zápisov: $C = O(1)$, $c = \Omega(1)$, $f(n) = n^{O(1)}$? Ako ich možno vyjadriť bez použitia zápisov $O(\cdot)$.