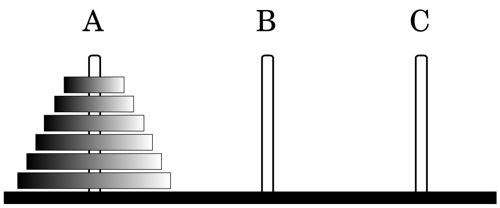
1 Hanojské veže

K dispozícii máme tri tyče (označme ich A, B a C) a n diskov navlečených na tyč A. Disky majú rozličný priemer a na tyči A sú usporiadané podľa priemeru, s najväčším diskom naspodu. Úlohou je premiestniť všetky disky na tyč C s využitím pomocnej tyče B.



Pri presúvaní diskov je potrebné dodržať nasledujúce pravidlá:

1. naraz môžeme preniesť len jeden disk
2. disk môžeme preniesť len na inú tyč (nie mimo)
3. disk môžeme položiť len na disk s väčším priemerom

V prvom rade nás zaujíma, či sa úloha vôbec dá vyriešiť pre ľubovoľné n. Ak áno, tak akým najmenším počtom prenesení je ju možné splniť. Ľahko vidieť, že pre $n = 1, 2, 3$ má úloha riešenie. Pre jeden disk stačí jedno prenesenie: $A \to C$. V prípade $n = 2$ potrebujeme tri prenesenia: $A \to B$, $A \to C$, $B \to C$. Pre $n = 3$ máme sedem prenesení: $A \to C$, $A \to B$, $C \to B$, $A \to C$, $B \to A$, $B \to C$, $A \to C$. Tieto riešenia sú zároveň optimálne – dosahujú minimálny počet potrebných prenesení.

Pre riešenie úlohy vo všeobecnosti môžeme aplikovať rekurzívny prístup. Ak potrebujeme preniesť $n > 0$ diskov z tyče A na tyč C, tak najskôr prenesieme $n - 1$ vrchných diskov z tyče A na B, potom najväčší disk z A na tyč C a nakoniec presunieme $n-1$ diskov z tyče B na tyč C. Kedže elementárne prípady sme už vyriešili skôr, vieme, že úloha má vždy riešenie. Zároveň sme získali horný odhad počtu potrebných prenesení. Označme T_n minimálny potrebný počet prenesení diskov pre úlohu s n diskami. Vieme, že $T_1 = 1$, $T_2 = 3$ a $T_3 = 7$. Pre $n = 0$ môžeme položiť $T_0 = 0$. Z prezentovaného rekurzívneho postupu vyplýva:

$$T_n \leq 2T_{n-1} + 1, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

Fakt, že rekurzívny postup vedie k optimálnemu premiestňovaniu diskov nie je ťažké ukázať. Počas presunov musíme niekedy prenášať najväčší disk medzi dvoma tyčami. V tomto okamihu musia byť všetky ostatné disky na zostávajúcej tyči. Prirodzene, nemá zmysel prenášať najväčší disk na tyč B, ale hneď na tyč C. Teda úloha sa rozpadne na dve časti: pred presunom najväčšieho disku a po jeho presune. Tieto podúlohy treba riešiť optimálne aby aj výsledné riešenie bolo optimálne ... a dostaneme popísaný postup. Zosumarizovaním predchádzajúcich úvah dostávame pre optimálny počet prenesení diskov rekurenciu

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_n &= 2T_{n-1} + 1, \qquad \forall\, n \geq 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Pokúsme sa rekurenciu riešiť. Vypočítame niekoľko ďalších hodnôt T_n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
T_n	0	1	3	7	15	31	63	127	...

Po výpočte niekoľkých hodnôt T_n, nás napadne nasledujúca hypotéza: $T_n = 2^n - 1$, pre všetky $n \geq 0$. Dokázať ju možno matematickou indukciou.

1. Tvrdenie platí pre $n = 1$: $T_1 = 2T_0 + 1 = 1$.
2. Nech tvrdenie platí pre $n-1$. Ukážeme, že platí aj pre n: $T_n = 2T_{n-1} + 1 = 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$.

Rekurentný vzťah (1) sa dá riešiť aj inak ako „uhádnutím“ a následným dokazovaním. Môžeme napríklad urobiť substitúciu $U_n = T_n + 1$. Potom dostaneme

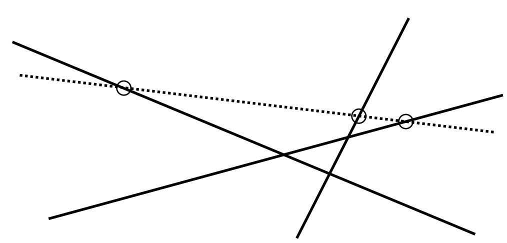
$$\begin{aligned} U_0 &= 1 \\ U_n &= 2U_{n-1}, \qquad \forall\, n \geq 1. \end{aligned}$$

Odtiaľ už priamočiaro dostávame $U_n = 2^n$ a teda $T_n = 2^n - 1$. Neskôr si ukážeme ďalšie metódy, ako riešiť rekurencie systematickejším spôsobom.

Úloha: Ako sa zmení situácia s počtom prenesení, ak zakážeme priame presuny diskov z tyče A na tyč C?

2 Priamky v rovine

Máme n priamok v rovine. Úlohou je určiť, aký je maximálny počet častí, na ktoré sa rovina rozdelená týmito priamkami „rozpadne“. Označme tento počet L_n. Pre malé hodnoty n je ľahké určiť L_n: $L_0 = 1$, $L_1 = 2$, $L_2 = 4$ a $L_3 = 7$. Určiť z týchto hodnôt rozumnú hypotézu nie je jednoduché. Skonštruujme preto rekurentný vzťah pre L_n.



Predpokladajme, že máme v rovine už $n - 1$ priamok. Položme ďalšiu priamku tak, že pretína všetký ostatné (teda nie je rovnobežná ani zhodná so žiadnou z nich) a zároveň nepretína žiadnu z priamok v bode prieniku s inou priamkou. Táto priamka bude mať $n-1$ navzájom rôznych prienikov s ostatnými priamkami. Pritom medzi každými dvoma prienikmi rozdelí príslušnú časť roviny na dve časti. Podobne rozdelí na dve aj časti roviny pred prvým prienikom a po poslednom prieniku. Rozdelenie práve na dve časti vyplýva z konvexnosti všetkých častí roviny. To znamená, že n-tá priamka zvýši počet častí o n. Dostávame nasledujúci vzťah:

$$L_n \geq L_{n-1} + n, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

Ľahko možno vidieť, že v rekurencii platí rovnosť, lebo viac ako $n-1$ prienikov s ostatnými priamkami novopridaná mať nemôže. Zosumarizujme rekurentný vzťah pre L_n:

$$\begin{aligned} L_0 &= 1 \\ L_n &= L_{n-1} + n, \qquad \forall\, n \geq 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Rozvinutím rekurencie (2) dostaneme

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + n \\ &= L_{n-2} + (n-1) + n \\ &\ \ \vdots \\ &= L_0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \end{aligned}$$

Označme $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$. Teda $L_n = 1 + S_n$. Teraz stačí už len dopočítať hodnotu S_n. Existuje mnoho spôsobov výpočtu S_n (napr. ide o súčet aritmetickej postupnosti), ukážeme si jeden. Sčítajme nasledujúce rovnosti:

$$\begin{array}{r@{\,}c@{\,}c@{\,}c@{\,}c} S_n = & 1 & +\ 2 & + \ldots + & n \\ S_n = & n & +\,(n-1) & + \ldots + & 1 \\ \hline 2S_n = & (n+1) & +\,(n+1) & + \ldots + & (n+1) \end{array}$$

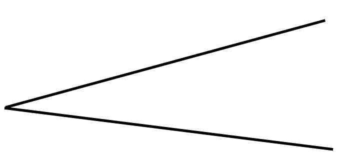
Odtiaľ máme

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \forall\, n \geq 0.$$

Dosaďme získanú hodnotu do vzťahu pre L_n a máme riešenie úlohy:

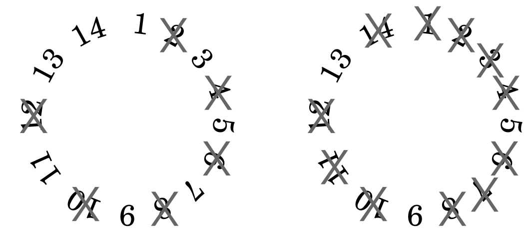
$$L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1, \qquad \forall\, n \geq 0.$$

Úloha: Určte maximálny počet častí, na ktoré sa rozpadne rovina, ak namiesto priamok použijeme „uhly“ (jeden „uhol“ je na obrázku).



3 Škrtanie čísel

V kruhu máme postupnosť n čísel: $1, 2, \ldots, n$. Začíname od čísla 1 a škrtáme postupne každé druhé číslo. Úlohou je určiť, aké číslo z postupnosti ostane ako posledné.



Pre $n = 14$ postupne škrtáme čísla 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 3, 7, 11, 1, 9, 5. Posledným číslom teda bude (šťastná) 13.

Označme $J(n)$ číslo posledného čísla. Ak máme párny počet čísel, teda $1, 2, \ldots, 2n$, tak v prvom kole vyškrtáme všetky párne čísla a v druhom kole opäť začíname od čísla 1. Pritom ostali už len nepárne čísla $1, 3, \ldots, 2n-1$. Teda vieme, že

$$J(2n) = 2J(n) - 1.$$

Uvažujme teraz o nepárnom počte čísel: $1, 2, \ldots, 2n+1$. Po prvom kole a jednom škrtnutí navyše nám ostane n čísel $3, 5, \ldots, 2n+1$, pričom začíname od čísla 3. Preto

$$J(2n+1) = 2J(n) + 1.$$

Špeciálny prípad, ktorý nie je zatiaľ pokrytý je $n = 1$. Vtedy je $J(n) = 1$. Zosumarizujme rekurentný vzťah pre výpočet $J(n)$:

$$\begin{aligned} J(1) &= 1 \\ J(2n) &= 2J(n) - 1, \qquad \forall\, n > 1 \\ J(2n+1) &= 2J(n) + 1, \qquad \forall\, n > 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Na základe rekurencie (3) môžeme vypočítať niekoľko prvých hodnôt $J(n)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5

n	11	12	13	14	15	16	17	18
$J(n)$	7	9	11	13	15	1	3	5

Ľahko si môžeme všimnúť (a ešte ľahšie matematickou indukciou overiť), že $J(2^n) = 1$. Avšak aj medzi mocninami 2 vykazuje $J(n)$ pravidelnosť. Vyjadrime n v tvare $n = 2^m + l$, kde $0 \leq l < 2^m$. Potom podľa hodnôt v tabuľke môžeme vysloviť hypotézu, že $J(n) = 2l + 1$. Pravdivosť hypotézy môžeme ukázať v dvoch krokoch:

1. $J(2^m) = 1$ (triviálne indukciou).
2. Nech $0 < l < 2^m$. Vyškrtneme l čísel. Ostane mi 2^m čísel, z ktorých posledné bude podľa predchádzajúceho bodu práve to, od ktorého teraz pokračujeme. Tým číslom je $2l + 1$.

Keďže $J(n)$ závisí na mocnine 2, skúsme ho vyjadriť binárne: $n = (b_m b_{m-1} \dots b_0)_2$, kde $b_m = 1$. Potom $l = (0\, b_{m-1} \dots b_0)_2$ a $2l+1 = (b_{m-1} b_{m-2} \dots b_0\, 1)_2$. Teda $J(n)$ dostaneme z n cyklickou rotáciou o jeden bit doľava.

Úloha: Pre aké n je $J(n) = n/2$?

3.1 Zovšeobecnenie

Zovšeobecnime rekurentný vzťah (3) takto:

$$\begin{aligned} f(1) &= \alpha \\ f(2n) &= 2f(n) + \beta, \qquad \forall\, n > 1 \\ f(2n+1) &= 2f(n) + \gamma, \qquad \forall\, n > 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Niekoľko prvých hodnôt $f(n)$ je v nasledujúcej tabuľke.

n	1	2	3	4
$f(n)$	α	$2\alpha+\beta$	$2\alpha+\gamma$	$4\alpha+3\beta$

n	5	6	7
$f(n)$	$4\alpha+2\beta+\gamma$	$4\alpha+\beta+2\gamma$	$4\alpha+3\gamma$

Opäť vyjadríme n v tvare $n = 2^m + l$, kde $0 \le l < 2^m$. Očakávame, že riešenie bude v tvare

$$f(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma.$$

Na hľadanie funkcií $A(n)$, $B(n)$ a $C(n)$ použijeme *metódu budovania repertoáru*. V nej dosadzujeme vhodné hodnoty za parametre α, β, γ alebo vhodné funkcie za $f(n)$ tak, aby sme získali hľadané funkcie.

1. Položme $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$. Potom $f(n) = A(n)$ a máme rekurentný vzťah

$$\begin{aligned} A(1) &= \alpha \\ A(2n) &= 2A(n), \qquad \forall\, n > 1 \\ A(2n+1) &= 2A(n), \qquad \forall\, n > 1. \end{aligned}$$

   Jeho riešením dostaneme $A(n) = 2^m$.

2. Položme $f(n) = 1$. Z rekurencie (4) potom máme

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha \\ 1 &= 2 \cdot 1 + \beta \\ 1 &= 2 \cdot 1 + \gamma. \end{aligned}$$

   Riešením dostaneme $\alpha = 1$, $\beta = -1$ a $\gamma = -1$. Dosadením konštánt do výrazu pre $f(n)$ získame

$$f(n) = 1 = A(n) - B(n) - C(n).$$

3. Položme $f(n) = n$. Z rekurencie (4) potom máme

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha \\ 2n &= 2n + \beta \\ 2n+1 &= 2n + \gamma. \end{aligned}$$

   Riešením dostaneme $\alpha = 1$, $\beta = 0$ a $\gamma = 1$. Dosadením konštánt do výrazu pre $f(n)$ získame

$$f(n) = n = A(n) + C(n).$$

   Použitím hodnoty $A(n)$ získanej v bode 1 dostaneme hodnotu $C(n)$:

$$C(n) = n - A(n) = 2^m + l - 2^m = l.$$

Teraz zostáva už len zo vzťahu odvodenom v bode 2 získať hodnotu $B(n)$:

$$B(n) = A(n) - C(n) - 1 = 2^m - l - 1.$$

Preto je riešenie rekurencie (4) takéto:

$$f(2^m + l) = 2^m\alpha + (2^m - l - 1)\beta + l\gamma.$$

Na záver uveďme (posledné) zovšeobecnenie. Uvažujme rekurentný vzťah

$$\begin{aligned} f(1) &= \alpha_1 \\ f(2) &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ f(d-1) &= \alpha_{d-1} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} f(dn) &= cf(n) + \beta_0 \\ f(dn+1) &= cf(n) + \beta_1 \\ &\vdots \\ f(dn+d-1) &= cf(n) + \beta_{d-1} \end{aligned}\right\} \quad \forall\, n \ge 1,$$

kde $d, c \in \mathbf{N}$. Vyjadrime argument v sústave o základe d a počítajme:

$$\begin{aligned} f((b_m \dots b_0)_d) &= cf((b_m \dots b_1)_d) + \beta_{b_0} \\ &= c^2 f((b_m \dots b_2)_d) + c\beta_{b_1} + \beta_{b_0} \\ &\ \ \vdots \\ &= (\alpha_{b_m}\, \beta_{b_{m-1}} \dots \beta_{b_1}\, \beta_{b_0})_c \end{aligned}$$

Príklad: Nech $d = 3$ a $c = 5$. Nech $f(n)$ je daná rekurenciou

$$\begin{aligned} f(1) &= 9 \\ f(2) &= 10 \\ f(3n) &= 5f(n) - 1 \\ f(3n+1) &= 5f(n) + 2 \\ f(3n+2) &= 5f(n) - 3. \end{aligned}$$

Počítajme
$f(137) = f((12002)_3) = (9, -3, -1, -1, -3)_5 = 9 \cdot 5^4 + (-3) \cdot 5^3 + (-1) \cdot 5^2 + (-1) \cdot 5^1 + (-3) \cdot 5^0 = 5217.$

Úloha: Analyzujte situáciu, ak v pôvodnom probléme o škrtaní čísel škrtáme každé tretie číslo.

Referencie

[1] L. Graham, D. Knuth, O. Patashnik: *Concrete Mathematics*, Second Edition, Addison-Wesley, 1994. (1. kapitola)