1 Sumy – označenia

Na zápis súm používame dve základné notácie: „trojbodkovú“ a sigma notáciu:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Niekedy je vhodnejšie (a budeme) používať špecifikáciu indexu pomocou podmienky pod sumou:

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k$$

Označenie $\sum_{P(k)} a_k$ označuje súčet všetkých členov a_k takých, že k je celé číslo spĺňajúce podmienku $P(k)$. Ak je $P(k)$ nepravda pre všetky k, tak súčet je rovný 0 (hodnota „prázdnej“ sumy). Alternatívne používané označenie ponúka Iversonova notácia, ktorá podmienku prenáša dovnútra sumy:

$$\sum_{P(x)} a_k = \sum_{k} a_k [P(k)],$$

kde $[P(k)] = 0$, keď je $P(k)$ nepravda a $[P(k)] = 1$ v opačnom prípade. Niekedy nemusí byť a_k definované pre všetky k. V takomto prípade prijmeme dohodu, že násobenie nulovou hodnotou $[P(k)]$ vedie k 0. Teda vo výraze $\sum_k [4 \leq k < 9](k-2)^{-1}$ pre hodnotu $k = 2$ dostávame $[4 \leq 2 < 9] \cdot (1/0) = 0$.

Úloha: Rozpíšte sumu

$$\sum_{-1 \leq k^2 - 3 \leq 5} a_{k+2}.$$

2 Sumy a rekurencie

Mnohé sumy je možné vyjadriť v tvare rekurencie:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} S_0 &= a_0 \\ S_n &= S_{n-1} + a_n, \quad n > 0 \end{aligned}$$

Na druhej strane aj niektoré rekurencie sa dajú pretransformovať na sumy. Uvažujme rekurentný vzťah

$$a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n, \quad n > 0, \tag{1}$$

pričom T_0 je konštanta. Vynásobme obe strany „sumačným faktorom“ s_n:

$$s_n a_n T_n = s_n b_n T_{n-1} + s_n c_n.$$

Ak zvolíme s_n tak, že $s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}$, tak pri substitúcii $S_n = s_n a_n T_n$ dostaneme:

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1} + s_n c_n, \\ S_n &= s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k. \end{aligned}$$

Riešenie rekurencie (1) je preto

$$T_n = \frac{1}{s_n a_n} \left(s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k \right). \tag{2}$$

Otázkou je, ako zvoliť hodnotu s_n. Počítajme:

$$s_n = \frac{a_{n-1}}{b_n} s_{n-1} = \cdots = \frac{a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1}{b_n b_{n-1} \ldots b_2}.$$

Okrem uvedenej hodnoty môžeme za s_n vziať aj jej ľubovoľný násobok (je to otázka voľby konštanty za s_1). Pokúsme sa teraz načrtnutý postup aplikovať na rekurenciu z problému Hanojských veží. Tam má rekurencia tvar:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_n &= 2T_{n-1} + 1, \qquad \forall\, n \geq 1. \end{aligned}$$

Teda $a_n = 1$ a $b_n = 2$. Preto zvolíme $s_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ a dosadením do (2) dostaneme riešenie T_n v tvare sumy

$$\begin{aligned} T_n &= 2^{n-1} \left(\frac{1}{2^0} \cdot 2 \cdot 0 + \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} \cdot 1 \right) \\ &= 2^{n-1} \sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1. \end{aligned}$$

Nasledujúca rekurencia sa objaví pri analýze algoritmu quicksort:

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ C_n &= n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_k, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Prenásobme rekurenciu n (aby sme sa zbavili zlomku) a potom vyjadrime rekurentný vzťah pre člen C_{n-1}. Dostaneme

$$nC_n = n^2 + n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_k, \quad n \geq 1,$$

$$(n-1)C_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1) + 2 \sum_{k=0}^{n-2} C_k, \quad n \geq 2.$$

Ak teraz odčítame druhý vzťah od prvého, budeme mať

$$nC_n - (n-1)C_{n-1} = 2n + 2C_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Nie je ťažké overiť, že tento vzťah platí aj pre $n = 1$ a pôvodnú rekurenciu môžeme prepísať na tvar

$$\begin{aligned} C_0 &= 0 \\ nC_n &= (n+1)C_{n-1} + 2n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Aplikujme teraz postup so „sumačným faktorom“. Ten vypočítame podľa odvodeného vzťahu (momentálne $a_n = n$ a $b_n = n+1$): $s_n = \frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{(n+1)\cdot n \cdots 3} = \frac{2}{n(n+1)}$. Riešenie je preto podľa (2) v tvare

$$C_n = 2(n+1) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}. \tag{3}$$

So súčtom $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ sa budeme často stretávať. Túto hodnotu budeme označovať H_n a nazývať n-té harmonické číslo. Upravme vzťah (3):

$$C_n = 2(n+1)(H_n + \frac{1}{n+1} - 1) = 2(n+1)H_n - 2n.$$

Nikdy nezaškodí overiť výsledok vyskúšaním niekoľkých konkrétnych príkladov (pre malé n) . . .

Úloha: Použite prezentovanú techniku na riešenie rekurencie

$$\begin{aligned} T_0 &= 5 \\ 2T_n &= nT_{n-1} + 3 \cdot n!, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

3 Manipulácie so sumami

Manipulácie so sumami pomáhajú v riešení súm (pri hľadaní uzavretého vzťahu) a umožňujú previesť zložité sumy na jednoduchšie. Prezentujeme niekoľko základných pravidiel pre narábanie so sumami. Prvými sú distributívny, asociatívny a komutatívny zákon (K je konečná množina a p je permutácia na K):

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} ca_k &= c \sum_{k \in K} a_k \\ \sum_{k \in K} (a_k + b_k) &= \sum_{k \in K} a_k + \sum_{k \in K} b_k \\ \sum_{k \in K} a_k &= c \sum_{p(k) \in K} a_{p(k)} \end{aligned}$$

S využitím Iversonovej notácie môžeme odvodiť ďalšie užitočné vlastnosti súm. Napríklad, nech K a K' sú množiny celých čísel. Potom

$$\sum_{k \in K} a_k + \sum_{k \in K'} a_k = \sum_{k \in K \cap K'} a_k + \sum_{k \in K \cup K'} a_k.$$

Tento vzťah vyplýva z toho, že $[k \in K] + [k \in K'] = [k \in K \cap K'] + [k \in K \cup K']$.

Manipulácie so sumami sú aj základom jednej z metód výpočtu uzavretého tvaru súm – tzv. perturbačnej metódy. Nech

$$S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k.$$

Myšlienka tejto metódy spočíva v tom, že vyjadríme S_{n+1} dvoma spôsobmi, vybraním posledného a prvého člena:

$$S_n + a_{n+1} = S_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \leq k \leq n} a_{k+1}.$$

Následne sa snažíme vyjadriť poslednú sumu pomocou S_n.

Skúsme aplikovať perturbačnú metódu na výpočet sumy $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} k2^k$.

$$\begin{aligned} S_n + (n+1)2^{n+1} &= 0 + \sum_{0 \leq k \leq n} (k+1)2^{k+1} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n} k2^{k+1} + \sum_{0 \leq k \leq n} 2^{k+1} \\ &= 2S_n + 2 \sum_{0 \leq k \leq n} 2^k \\ &= 2S_n + 2(2^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

Keď z rovnice vyjadríme S_n dostaneme:

$$S_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Opäť by nezaškodilo overiť výsledok vyskúšaním niekoľkých konkrétnych príkladov . . .

Tento vzťah sme mohli dostať aj aplikáciou derivácie na súčet geometrického radu:

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n} x^k &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \\ \sum_{0 \leq k \leq n} kx^{k-1} &= \frac{(1-x)(-(n+1)x^n) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Dosadením $x = 2$ a prenásobením konštantou 2 máme:

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k \leq n} k2^k &= 2 \cdot \frac{1 - (n+1)2^n + n2^{n+1}}{(1-2)^2} \\ &= 2 + 2^n(2n - n - 1) \\ &= 2 + 2^n(n-1). \end{aligned}$$

Úloha: Perturbačnou metódou určte uzavretý tvar sumy $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} k^2 3^k$.

4 Viacnásobné sumy

Častokrát sa vyskytujú sumy, v ktorých členy závisia na viacerých premenných. Napríklad

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j,k \leq 3} a_j b_k = a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + \\ + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + \\ + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3. \end{aligned}$$

Podobne ako v predchádzajúcich častiach, aj pri viacnásobných sumách môžeme použiť Iversonovu notáciu (suma sa berie cez všetky prípustné hodnoty indexov):

$$\sum_{P(j,k)} a_{j,k} = \sum_{j,k} a_{j,k}[P(j,k)].$$

Ďalší typ výrazov sú „sumy súm“, kde jednou zo základných úprav je zmena poradia sumácie:

$$\sum_j \sum_k a_{j,k}[P(j,k)] = \sum_{P(j,k)} a_{j,k} = \sum_k \sum_j a_{j,k}[P(j,k)].$$

Zmena poradia sumácie sa dá urobiť vždy, keď sú indexy j, k nezávislé. Napríklad:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_j b_k &= \sum_{j,k} a_j b_k [j\in J \wedge k\in K] \\
&= \sum_{j,k} a_j b_k [j\in J][k\in K] \\
&= \sum_j \sum_k a_j b_k [j\in J][k\in K] \\
&= \sum_j a_j [j\in J] \sum_k b_k [k\in K] \\
&= \Big(\sum_{j\in J} a_j\Big)\Big(\sum_{k\in K} b_k\Big).
\end{aligned}$$

V prípade, že j a k nie sú nezávislé, treba postupovať opatrnejšie. Identita

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K(j)} a_{j,k} = \sum_{k\in K'}\sum_{j\in J'(k)} a_{j,k}$$

platí vtedy, keď J, $K(j)$, K' a $J'(k)$ spĺňajú vzťah $(j\in J)(k\in K(j)) \Leftrightarrow (k\in K')(j\in J'(k))$.

Ilustrujme to na príklade. Platí $(1\le j\le n)(j\le k\le n) = (1\le j\le k\le n) = (1\le k\le n)(1\le j\le k)$. Preto

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{j,k}.$$

Príklad: Uvažujme pole n^2 čísel

$$\begin{bmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_n \\ & \vdots & & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \dots & a_na_n \end{bmatrix}$$

v ktorom chceme nájsť jednoduchý výraz pre súčet prvkov v hornej trojuholníkovej podmatici pola (označme súčet S_h). Zároveň označme súčet dolnej trojuholníkovej podmatice S_d. Teda

$$S_h = \sum_{1\le j\le k\le n} a_j a_k.$$

Ľahko vidieť, že $S_h = S_d$ (lebo $a_j a_k = a_k a_j$). Počítajme:

$$\begin{aligned}
2S_h &= S_d + S_h \\
&= \sum_{1\le k\le j\le n} a_j a_k + \sum_{1\le j\le k\le n} a_j a_k \\
&= \sum_{1\le j,k\le n} a_j a_k + \sum_{1\le j=k\le n} a_j a_k \\
&= \sum_{1\le j\le n} a_j \sum_{1\le k\le n} a_k + \sum_{1\le j\le n} a_j^2 \\
&= \Big(\sum_{1\le j\le n} a_j\Big)^2 + \sum_{1\le j\le n} a_j^2.
\end{aligned}$$

Teda dostávame

$$S_h = \frac{1}{2}\left[\Big(\sum_{1\le j\le n} a_j\Big)^2 + \sum_{1\le j\le n} a_j^2\right].$$

Príklad: Chceme zjednodušiť

$$S = \sum_{1\le j<k\le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j).$$

Opäť môžeme vyjadriť S aj pomocou „prehodených“ indexov a budeme počítať hodnotu $2S$:

$$\begin{aligned}
2S &= \sum_{1\le j<k\le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \\
&\quad + \sum_{1\le k<j\le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \\
&= \sum_{1\le j,k\le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \\
&\quad - \sum_{1\le j=k\le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j).
\end{aligned}$$

Druhá suma je zjavne rovná 0, takže dostávame (hranice indexov pre prehľadnosť vynechávame):

$$\begin{aligned}
2S &= \sum_{j,k} a_k b_k - \sum_{j,k} a_k b_j - \sum_{j,k} a_j b_k + \sum_{j,k} a_j b_j \\
&= 2n\sum_k a_k b_k - 2\Big(\sum_k a_k\Big)\Big(\sum_k b_k\Big).
\end{aligned}$$

Ak dáme doterajšie odvodenia dokopy, dostaneme:

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) &= n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \\
&\quad - \sum_{1\le j<k\le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j).
\end{aligned}$$

Z tejto identity vyplývajú Čebyševove sumačné nerovnosti. Ak platí

$$\begin{aligned}
& a_1 \le \dots \le a_n \quad \wedge \quad b_1 \le \dots \le b_n \\
\text{alebo}\quad & a_1 \ge \dots \ge a_n \quad \wedge \quad b_1 \ge \dots \ge b_n,
\end{aligned}$$

tak dostávame

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \le n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Keď podmienku otočíme,

$$\begin{array}{rl} & a_1 \le \cdots \le a_n \quad \wedge \quad b_1 \ge \cdots \ge b_n \\ \text{alebo} & a_1 \ge \cdots \ge a_n \quad \wedge \quad b_1 \le \cdots \le b_n, \end{array}$$

budeme mať

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \ge n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Referencie

[1] L. Graham, D. Knuth, O. Patashnik: *Concrete Mathematics*, Second Edition, Addison-Wesley, 1994. (2. kapitola)