Rekurentné problémy

Mnohé kombinatorické problémy sa riešia prevádzaním daného problému na riešenie menších prípadov, ktoré už vieme vyriešiť. Takejto metóde sa hovorí *metóda rekurencie* (z latinského recurrere – vracať). Nasledujúce motivačné príklady sú klasickými príkladmi na túto metódu a boli matematikmi mnohokrát vyšetrované.

Motivačný príklad na počet permutácií, Fibonacciho číslo ...

Hanojské veže

Boli vymyslené francúzskym matematikom Edouardom Lucasom v roku 1883. Máme danú vežu zostavenú z 8 diskov, ktoré sú na začiatku umiestnené na kolíku A a usporiadané podľa veľkosti od najväčšieho po najmenší. Úlohou je preniesť vežu z kolíka A na iný kolík B, pričom:

- máme k dispozícii jeden pomocný kolík C,
- môžme prenášať vždy len jeden disk,
- nesmieme nikdy položiť väčší disk na menší.

Lucas opriadol svoju hračku romantickým príbehom o oveľa väčšej Brahmovej veži, ktorá má údajne 64 diskov z rýdzeho zlata navlečených na 3 diamantových ihliciach. Na počiatku vekov, vraví, dal Boh tieto zlaté disky na prvú ihlicu a stanovil skupine kňazov preniesť ich na tretiu, podľa hore uvedených pravidiel. Ako hovoria správy, kňazi pracujú na úlohe dňom a nocou. Keď skončia, veža sa rozpadne a svet zanikne.

Na prvý pohľad nie je ani zrejmé, či hlavomam má vôbec riešenie. Ale trocha premýšľania (alebo ak už nebodaj problém poznáme) nás presvedčí, že má. Teraz vyvstane otázka: ako sa to dá urobiť najlepšie? Koľko presunov je nevyhnutných a postačujúcich na vyriešenie úlohy?

Najlepší spôsob ako vyriešiť podobnú otázku je trochu ju zovšeobecniť. Brahmova veža má 64, Hanojská veža 8; uvažujme čo sa stane, keď diskov bude n.

Jednou z nesporných výhod takéhoto zovšeobecnenia je, že problém sa môže ešte zmenšiť. Naozaj, niekedy je výhodné najprv sa pozerať na *malé prípady*. Je možné veľmi ľahko nahliadnuť, ako prenášať vežu obsahujúcu len 1, či 2 disky. S troškou experimentovania zistíme, ako prenášať vežu z 3 diskov.

Ďalší krok v riešení problému je zaviesť vhodné označenie: *vhodne označ a zvíťaz*. Nech povedzme T_n je minimálny počet presunutí, ktorými prenesieme n diskov z jedného kolíka na druhý dodržiavajúc pritom Lucasove pravidlá. Potom zrejme $T_1 = 1$ a $T_2 = 3$.

Zadarmo môžeme získať ešte nejaké informácie, ak zoberieme najmenší prípad zo všetkých: samozrejme $T_0 = 0$. Rozumní matematici sa nehanbia myslieť v malom, pretože všeobecné prípady sú ľahšie pochopiteľné, keď dobre rozumieme extrémnym prípadom (aj keď sú triviálne).

Teraz sa ale snažme myslieť vo veľkom. Najprv prenesieme $n-1$ menších diskov na iný kolík (čo vyžaduje T_{n-1} presunov), potom prenesieme najväčší (čo vyžaduje 1 presun) a nakoniec preniesť $n-1$ menších diskov späť na väčší (čo vyžaduje ďalších T_{n-1} presunov). Teda n diskov vieme preniesť na najviac $2T_{n-1}+1$ presunov:

$$T_n \leq 2T_{n-1} + 1, \quad \text{pre } n > 0.$$

V tomto vzťahu je zámerne použité '$\leq$' namiesto '=' pretože náš spôsob ukazuje len, že $2T_{n-1}+1$ presunov stačí neukázali sme, že $2T_{n-1}+1$ je nevyhnutných. Niekto rozumnejší by mohol byť schopný vymyslieť postup vyžadujúci menej presunov.

Existuje ale lepší spôsob? V skutočnosti nie. V istej chvíli musíme presunúť najväčší disk. Keď ho budeme prenášať, $n-1$ menších diskov musí byť na jednom kolíku, na čo sme potrebovali aspoň T_{n-1} presunov. Ak nie sme príliš šikovný, môžeme presúvať najväčší disk aj viackrát. Ale po poslednom presune musíme presunúť menších $n-1$ diskov (ktoré musia byť opäť na jednom kolíku) späť na najväčší; čo zase vyžaduje T_{n-1} presunov. Teda

$$T_n \geq 2T_{n-1}+1, \quad \text{pre } n>0.$$

Tieto dve nerovnosti, spolu s triviálnym riešením pre $n=0$ dávajú:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0; \\ T_n &= 2T_{n-1}+1, \quad \text{pre } n>0. \end{aligned} \tag{1}$$

Všimnime si, že tieto vzťahy sú konzistné so známymi hodnotami $T_1=1$ a $T_2=3$.

Množina rovností sa nazýva *rekurencia.* Má základné hodnoty a rovnosť na výpočet všeobecnej hodnoty na základe predchádzajúcich. Niekedy sa odvolávame na samostanú všeobecnú rovnosť ako na rekurenciu, i keď niekedy z technického hľadiska, kvôli úplnosti, potrebujeme aj základné hodnoty.

Rekurencia nám umožňuje vypočítať T_n pre ľubovoľné n. Ale v skutočnosti, keď je n veľké, nik rád nepočíta priamo z rekurencie; trvá to pridlho. Rekurencia nám dáva len nepriamu "lokálnu" informáciu. Oveľa šťastnejšími nás spraví *riešenie rekurencie.* To je to, čo by sa nám páčilo, milý malý uzavretý tvar pre T_n, pomocou ktorého by sme mohli rýchlo počítať, hoci aj pre veľké n.

Ako teda riešime rekurencie? Jeden spôsob je uhádnuť správne riešenie a potom o ňom dokázať, že je naozaj správne. Ak chceme teda hádať, pozrime sa opäť na najmenšie prípady. Tak teda počítajme postupne: $T_3=2\cdot3+1=7$; $T_4=2\cdot7+1=15$; $T_5=2\cdot15+1=31$; $T_6=2\cdot31+1=63$. Aha, vyzerá to ako

$$T_n = 2^n-1, \quad \text{pre } n\geq 0. \tag{2}$$

Každopádne to funguje aspoň pre $n\leq 6$.

Najvhodnejším spôsobom pre dôkaz správnosti riešenia je matematická indukcia. Spomínate si? Báza a indukčný predpoklad! Báza je triviálna, pretože $T_0=2^0-1=0$. A indukčný krok vyplýva pre $n>0$, ak predpokladáme, že (2) platí, keď n nahradíme $n-1$:

$$T_n = 2T_{n-1}+1 = 2(2^{n-1}-1)+1 = 2^n-1.$$

Teda (2) platí aj pre n. Dobré! Naše hľadanie T_n sa skončilo úspešne!

Ale práca kňazov sa naproti tomu neskončila. Ako oznámila tlačová agentúra ITKA, stále usilovne prenášajú disky a ešte chvíľu aj budú, pretože pre $n=64$ treba vykonať $2^{64}-1$ presunov. A aj pri neuskutočniteľnej rýchlosti presúvania diskov, každú mikrosekundu 1 disk, by potrebovali viac než 5000 storočí na prenesenie celej Brahmovej veže. Lucasov pôvodný problém je trochu praktickejší. Vyžaduje $2^8 - 1 = 255$ presunov, čo zručnému trvá asi štyri minúty.

Naša analýza Hanojských veží nás doviedla k správnemu riešeniu, ale mali sme zrovna šťastie pri typovaní výsledku, ktorý sa ukázal ako správny. Jedným z hlavných cieľom tejto časti prednášok bude vysvetliť, ako sa dajú rekurencie riešiť (alebo aspoň asymptoticky odhadnúť) bez toho, aby sme boli jasnovidci. Napríklad uvidíme, že rekurenciu (1) môžeme zjednodušiť pripočítaním 1 k obom stranám rovnice:

$$\begin{aligned} T_0 + 1 &= 1; \\ T_n + 1 &= 2T_{n-1} + 2, \quad \text{pre } n > 0. \end{aligned}$$

Teraz, ak položíme $U_n = T_n + 1$, dostaneme

$$\begin{aligned} U_0 &= 1; \\ U_n &= 2U_{n-1}, \quad \text{pre } n > 0. \end{aligned}$$

A nemusíme byť zrovna génius nato, aby sme zistili, že riešenie tejto rekurencie je práve $U_n = 2^n$; teda $T_n = 2^n - 1$. Na to by snáď prišiel aj počítač.

Krátke zhrnutie

Rekurencia Hanojských veží je typická pre mnohé rekurencie, ktoré sa vyskytujú v aplikáciach všetkých druhov. Pri hľadaní uzavretých foriem pre zaujímavé veličiny vyzerajúce ako T_n, prechádzame tromi etapami:

- Pozrieme sa na malé prípady. Čím vnikneme do problému a pomôže nám to (možno) v 2. a 3. etape.
- Nájdeme a dokážeme matematický vzťah pre veličinu, ktorá nás zaujíma. V prípade Hanjských veží je to rekurencia (1), ktorá nám umožní vypočítať T_n pre každé n.
- Nájdeme a dokážeme uzavretú formu pre náš matematický vzťah. Pre Hanojské veže je to riešenie rekurencie (2).

My sa budeme sústreďovať predovšetkým na tretiu etapu.

Priamky v rovine

Nasledujúci príklad má vônu pravej talianske pizzy a príchuť artičokov: na koľko najviac kúskov možno rozrezať jeden kus pizzy keď budeme krájať n rovnými rezmi. (Kúsky nemusia byť rovnako veľké, to je zas iný známy problém spravodlivého delenia n ľudí. Poznáte jeho riešenie?)

Preformulujme úlohu matematickejšie: aký je maximálny počet L_n oblastí určených n priamkami v rovine? Ako prvý tento problém vyriešil roku 1826 švajčiarsky matematik Jacob Steiner.

Na začiatku sa opäť pozrieme na malé prípady, pričom nezabudneme ani na celkom najmenšie. Zrejme: $L_0 = 1$; $L_1 = 2$; $L_2 = 4$.

Po troche rozmýšľania s treťou priamkou ($L_3 = 7$) vykonáme vhodné zovšeobecnenie. n-tá priamka (pre $n > 0$) zvýši počet oblastí o k práve vtedy, keď pretne predchádzajúce priamky v $k - 1$ rôznych bodoch. Dve priamky môže pretnúť najviac v dvoch bodoch. Z tohoto dôvodu môže nová priamka pretnúť $n-1$ starých priamok v najviac $n-1$ rôznych bodoch a musí teda platiť $k \leq n$. Získali sme horný odhad

$$L_n \leq L_{n-1} + n, \quad \text{pre } n > 0.$$

Navyše sa dá ľahko nazrieť, že v tomto výraze môžeme dosiahnuť rovnosť. n-tú priamku umiestnime jednoducho tak, že nie je so žiadnou inou rovnobežná (teda ich všade pretína) a tak, aby neprechádzala cez žiaden ich priesečník (teda ich pretína všetky v navzájom rôznych bodoch). Rekurencia je preto:

$$\begin{aligned} L_0 &= L_{n-1} + n, \\ &= L_{n-2} + (n-1) + n, \\ &= L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n, \\ &\vdots \\ &= L_0 + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n, \\ &= 1 + S_n, \quad \text{kde } S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n. \end{aligned} \tag{3}$$

Povedané ľudsky, L_n je o jedna viac než súčet S_n prvých n kladných celých čísel. Potrápime trochu pamäť s aritmetickou postupnosťou a spomenieme si, že $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Naše riešenie je teda

$$L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1, \quad \text{kde } n \geq 0. \tag{4}$$

Ako odborníci môžeme byť s týmto odvodením spokojní a považovať ho za dôkaz, veď sme sa aj pri rozvíjaní a premýšľaní zapotili. Ale študenti matematiky by mali byť schopní dosahovať vyšší štandard, čo tak teda vytvoriť rigorózny dôkaz indukcie. Kľúčový indukčný krok je

$$L_n = L_{n-1} + n = \left(\frac{1}{2}(n-1)n + 1\right) + n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1.$$

Teraz nemôžu byť o našom výsledku žiadne pochybnosti.

Na začiatku sme vraveli o uzavretých tvaroch bez toho, aby sme exaktne povedali, čo tým myslíme. Obyčajne je to celkom jasné. Rekurencie typu (1) a (3) nie sú v uzavretom tvare – vyjadrujú veličiny sami pomocou seba; ale riešenia typu (2) a (4) sú v uzavretom tvare. Sumy ako $1 + 2 + \cdots + n$ nie sú v uzavretom tvare – klamú " ... "; ale výrazy typu $\frac{n(n+1)}{2}$ sú. Skúsme to definovať: výraz vyjadrujúci veličinu $f(n)$ je v uzavretom tvare, ak ho môžeme vypočítať nanajvýš s konštantným počtom "dobre známych" štandardných operácií, nezávislých od n. Napríklad, $2^n - 1$ a $\frac{n(n+1)}{2}$ sú v uzavretom tvare, pretože vyžadujú explicitne len sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie a umocňovanie.

Celkový počet jednoduchých uzavretých tvarov je obmedzený. Existujú rekurencie, ktoré nemajú jednoduché uzavreté tvary. Keď sa niektorá z týchto rekurencií bude ukazovať dôležitá, pretože sa bude opakovane vyskytovať, rozšírime náš repertoár o nové oprácieô týmto spôsobom môžeme široko rozšíriť škálu problémov, ktoré vieme vyriešiť v "jednoduchej" uzavretej forme. Napríklad, súčin prvých n celých čísel, $n!$, sa ukázal byť dôležitý, tak ho budeme považovať za základnú operáciu.

Predstavme si, že namiesto priamok použijeme lomené čiary, každá s jedným cikom vytvárajúcim ostrý uhol. Aký je maximálny počet Z_n oblastí určených takýmito lomenými čiarami v rovine?

Jozefova úloha

Najskôr trochu histórie. Nasledujúca úloha bola pomenovaná po známom historikovi prvého storočia, Flaviusovi Jozefovi. Podľa legendy, by Flavius bez matematického nadania neprežil a nestal sa slávnym (a taktiež by nám nemohol porozprávať svoj príbeh). Počas Židovsko-Rímskej vojny, bol medzi 41 židovskými vzbúrencami, ktorých Rimania chytili do pasce v jaskyni. Vzbúrenci sa rozhodli, že radšej ako by sa vzdali, spáchajú organizovane samovraždu nasledovným spôsobom: vytvoria kruh a postupujúc v ňom krok po kroku každý tretí spácha samovraždu, až pokým nikto neostane. Ale Jozef ešte s jedným priateľom nesúhlasil s touto nezmyselnou samovraždou a rýchlo si vypočítal kam sa má on a jeho priateľ v začarovanom kruhu postaviť.

V našom variante začneme s n ľuďmi, očíslovanými v kruhu od 1 až po n a budeme z neho vylučovať každého druhého, pokým nezostane len jeden. Bojová úloha: určite číslo prežívajúceho, označme si ho J_n.

Určime si pokusne J_{10}. A čo zisťujeme, že číslo 5 žije!!! A teraz ako obvykle, spočítajme si niekoľko malých hodnôt:

n	1	2	3	4	5	6
J_n	1	1	3	1	3	5

Zdá sa, že J_n je vždy nepárne číslo. A vskutku je preto dobrý dôvod: prvý prechod po kruhu vylúči všetky párne čísla.

Predpokladajme, že pôvodne máme $2n$ ľudí. Po prvom prejdení kruhu sa nám zredukoval počet ľudí na n. Vyriešme úlohu pre n, dostaneme číslo J_n. Vieme z tohto výsledku zrekonštruovať výsledok pre pôvodný počet? Samozrejme,

$$J_{2n} = 2J_n - 1, \quad \text{pre } n \geq 1.$$

A čo v neparnom prípade? V prípade $2n+1$ ľudí sa ukáže, že osoba číslo 1 je zahubená po osobe číslo $2n$. Analogicky ako v predchádzajúcom prípade dostávame sa do počiatočnej situácie s n ľuďmi. Vyriešime úlohu pre n a zistíme, že tentoraz sú ich čísla dvojnásobné a zvýšené o 1. Teda

$$J_{2n+1} = 2J_n + 1, \quad \text{pre } n \geq 1.$$

Skombinovaním týchto rovníc s $J_1 = 1$ dostaneme rekurenciu, ktorá definuje J vo všetkých prípadoch:

$$\begin{aligned} J_1 &= 1, \\ J_{2n} &= 2J_n - 1, \quad \text{pre } n \geq 1, \\ J_{2n+1} &= 2J_n + 1, \quad \text{pre } n \geq 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Táto rekurencia je oveľa efektívnejšia ako predchádzajúce, pretože pri každom použití zmenšuje n dva alebo viackrát. Mohli by sme vypočítať, povedzme $J(10000000)$ len 18-násobným použitím (5). Ale pretože život je tak krásny, ešte stále hľadáme uzavretretú formu, pretože pomocou nej to bude ešte rýchlejšie a o mnoho poučnejšie. Koniec koncov, je to otázka života a smrti.

Pri pohľade na (5) nás však nič múdre nenapadá a tak si skúsme rozpísať viacej hodnôt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
J_n	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Ej, hľa ... Začína nám svitať. Zdá sa, že môžeme vytvoriť skupiny podľa mocnín 2 (v tabuľke oddelené zvislými čiarami); J_n je na začiatku skupiny vždy 1 a postupne sa v rámci skupiny zväčšuje o 2. Teda ak si napíšeme n v tvare $n = 2^m + l$, kde 2^m je najväčšia mocnina 2 neprevyšujúca n a l je to, čo ostalo, riešenie našej rekurencie vyzerá potom takto:

$$J_{2^m+l} = 2l + 1, \quad \text{pre } m \geq 0 \text{ a } 0 \leq l < 2^m. \tag{6}$$

Pre našu úplnu spokojnosť musíme ešte vzťah (6) dokázať. Ako aj predtým, použijeme indukciu, tentokrát vzhľadom na m (t.j. na celú skupinu $2^m, 2^m+1, 2^m+2, \ldots, 2^m+2^m-1$). Keď $m = 0$, tak musí byť $l = 0$ a báza sa redukuje len na $J_1 = 1$, čo zrejme platí. Indukčný krok má dve časti v závislosti od toho, či je l párne alebo nepárne. Ak $m > 0$ a $2^m+l = 2n$, tak potom je l párne a

$$J_{(2^m+l)} = 2J_{(2^{m-1}+l/2)} - 1 = 2(2 \cdot l/2 + 1) - 1 = 2l - 1,$$

podľa (5) a indukčného predpokladu, čo sme vlastne chceli. Podobný dôkaz zaberie i v prípade nepárneho l.

Tak, či onak, indukcia je kompletná a výsledok (6) nepopierateľný.

Teraz si môžme prezradiť, že existuje aj elegantnejšie riešenie uvedeného problému. Kľúčovým je fakt, že $J_{2^m} = 1$ pre všetky m. Vo všeobecnom prípade, keď $n = 2^m + l$ sa počet osôb zmení na mocninu 2 potom, ako vylúčime z kruhu l osôb. Osoba, ktorá je na rade prežije a jej číslo je práve $2l + 1$.

V našom hľadaní riešenia hrajú dôležitú úlohu mocniny 2, takže je len prirodzené pozrieť si binárnu reprezentáciu n a J_n. Uvažujme binárny zápis n

$$n = (b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0)_2;$$

to je

$$n = b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + b_1 2 + b_0,$$

kde každé b_i je buď 0 alebo 1 a vedúci bit b_m je 1. Ak si spomenieme, že $n = 2^m + l$, dostaneme,

$$\begin{aligned} n &= (1 b_{m-1} b_{m-2} \ldots b_1 b_0)_2, \\ l &= (0 b_{m-1} b_{m-2} \ldots b_1 b_0)_2, \\ 2l &= (b_{m-1} b_{m-2} \ldots b_1 b_0)_2, \\ 2l + 1 &= (1 b_{m-1} b_{m-2} \ldots b_1 b_0 1)_2, \\ J_n &= (b_{m-1} b_{m-2} \ldots b_1 b_0 b_m)_2, \end{aligned}$$

Dokázali sme teda, že

$$J((b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2) = (b_{m-1} \dots b_1 b_0 b_m)_2,$$

čo v reči programátorov znamená, že J_n dostaneme z n cyklickým posunom o jeden bit doľava! Magické. Napríklad, ak $n = 100 = (1100100)_2$, tak $J_n = J((1100100)_2) = (1001001)_2$, čo je 73. Keby sme pracovali celý čas v dvojkovej sústave, pravdepodobne by sme si to všimli hneď.

Malé zobecnenie

Skúsme riešiť podobnú rekurenciu ako (5), ale so zavedenými konštantami α, β a γ. Ako bude riešenie vyzerať teraz?

$$\begin{aligned} f(1) &= \alpha, \\ f(2n) &= 2f(n) + \beta, \quad \text{pre } n \geq 1, \\ f(2n+1) &= 2f(n) + \gamma, \quad \text{pre } n \geq 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Náš pôvodný problém bol pre $\alpha = 1$, $\beta = -1$ a $\gamma = 1$. Začnúc s $f(1) = \alpha$ a pokračujúc ďalej môžeme vytvoriť nasledujúcu všeobecnú tabuľku pre malé hodnoty n:

n	$f(n)$
1	α
2	$2\alpha + \beta$
3	$2\alpha + \gamma$
4	$4\alpha + 3\beta$
5	$4\alpha + 2\beta + \gamma$
6	$4\alpha + \beta + 2\gamma$
7	$4\alpha + 3\gamma$
8	$8\alpha + 7\beta$
9	$8\alpha + 6\beta + \gamma$

Zdá sa, že koeficient pri α je najväčšia mocnina 2 v n. A ďalej, že medzi mocninami 2 koeficienty pri β klesajú po 1 k 0 a koeficienty pri γ rastú po 1 od 0. Preto, ak vyjadríme $f(n)$ v tvare

$$f(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma, \tag{8}$$

a vylúčime jeho závislosť na α, β a γ ukazuje sa, že:

$$\begin{aligned} A(n) &= 2^m, \\ B(n) &= 2^m - 1 - l, \\ C(n) &= l. \end{aligned}$$

Ako obyčajne, $n = 2^m + l$ a $0 \leq l < 2^m$, pre $n \geq 1$.

Uvedenú skutočnosť nie je ani príliš ťažké dokázať indukciou, ale my to robiť nebudeme. Namiesto toho si ukážeme iný spôsob, ako riešiť rekurenciu (7): voľbou špeciálnych hodnôt a ich vzájomnou kombináciou. Ilustrujme to uvážením špeciálneho prípadu $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, kedy sa $f(n)$ musí rovnať $A(n)$. Rekurencia (7) potom vyzerá takto:

$$\begin{aligned} A(1) &= 1, \\ A(2n) &= 2A(n), \quad \text{pre } n \geq 1, \\ A(2n+1) &= 2A(n), \quad \text{pre } n \geq 1. \end{aligned}$$

A skutočne je pravda (indukciou vzhľadom na m), že $A(2^m + l) = 2^m$.

V ďalšom kroku začneme s nejakou jednoduchou funkciou $f(n)$ a budeme hľadať konštanty (α, β, γ), ktorými je definovaná. Dosadením konštantnej funkcie $f(n) = 1$ dostaneme, že

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha, \\ 1 &= 2 \cdot 1 + \beta, \\ 1 &= 2 \cdot 1 + \gamma, \end{aligned}$$

a teda hodnoty $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, -1)$ spĺňajúce tieto rovnice nám dajú

$$A(n) - B(n) - C(n) = f(n) = 1.$$

Podobne môžme dosadiť $f(n) = n$:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha, \\ 2n &= 2n + \beta, \\ 2n + 1 &= 2n + \gamma, \end{aligned}$$

Tieto rovnice platia pre všetky n, keď $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 1)$.

A v podstate sme hotoví! Ukázali sme, že funkcie $A(n)$, $B(n)$ a $C(n)$ z (8), ktoré sú riešením (7) vo všeobecnosti, spĺňajú rovnice:

$$\begin{aligned} A(n) &= 2^m, \quad \text{pre } n = 2^m + l \text{ a } \ 0 \leq l < 2^m, \\ A(n) - B(n) - C(n) &= 1, \\ A(n) + C(n) &= n. \end{aligned}$$

Riešením uvedenej sústavy dostávame známe riešenie.

Tento prístup ilustruje prekvapivo užitočnú metódu *neurčitých koeficientov*. Najprv si zvolíme hodnoty parametrov, pre ktoré poznáme riešenie, tým dostaneme zoznam špeciálnych prípadov, ktoré máme vyriešiť. Kombináciou špeciálnych prípadov potom získame všeobecný prípad. Potrebujeme toľko nezávislých riešení špeciálnych prípadov, koľko je nezávislých parametrov (v tomto prípade sú tri α, β, γ).

Literatúra

Uvedená kapitola je voľným prekladom časti 1.kapitoly knihy R. Grahama, D. E. Knutha a O. Patashnika: *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.