Rekurentné problémy

Mnohé kombinatorické problémy sa riešia prevádzaním daného problému na riešenie menších prípadov, ktoré už vieme vyriešiť. Takejto metóde sa hovorí *metóda rekurencie* (z latinského recurrere – vracať). Nasledujúce motivačné príklady sú klasickými príkladmi na túto metódu a boli matematikmi mnohokrát vyšetrované.

Motivačný príklad na počet permutácií, Fibonacciho číslo ...

1. Hanojské veže

Boli vymyslené francúzskym matematikom Edouardom Lucasom v roku 1883. Máme danú vežu zostavenú z 8 diskov, ktoré sú na začiatku umiestnené na kolíku A a usporiadané podľa veľkosti od najväčšieho po najmenší. Úlohou je preniesť vežu z kolíka A na iný kolík B, pričom:

- máme k dispozícii jeden pomocný kolík C,
- môžeme prenášať vždy len jeden disk,
- nesmieme nikdy položiť väčší disk na menší.

Lucas opriadol svoju hračku romantickým príbehom o oveľa väčšej Brahmovej veži, ktorá má údajne 64 diskov z rýdzeho zlata navlečených na 3 diamantových ihliciach. Na počiatku vekov, vraví, dal Boh tieto zlaté disky na prvú ihlicu a stanovil skupine kňazov preniesť ich na tretiu, podľa hore uvedených pravidiel. Ako hovoria správy, kňazi pracujú na úlohe dňom a nocou. Keď skončia, veža sa rozpadne a svet zanikne.

Na prvý pohľad nie je ani zrejmé, či hlavomam má vôbec riešenie. Ale trocha premýšľania (alebo ak už nebodaj problém poznáme) nás presvedčí, že má. Teraz vyvstane otázka: ako sa to dá urobiť najlepšie? Koľko presunov je nevyhnutných a postačujúcich na vyriešenie úlohy?

Najlepší spôsob ako vyriešiť podobnú otázku je trochu ju zovšeobecniť. Brahmova veža má 64, Hanojská veža 8; uvažujme čo sa stane, keď diskov bude n.

Jednou z nesporných výhod takéhoto zovšeobecnenia je, že problém sa môže ešte zmenšiť. Naozaj, niekedy je výhodné najprv sa pozerať na *malé prípady*. Je možné veľmi ľahko nahliadnuť, ako prenášať vežu obsahujúcu len 1, či 2 disky. S troškou experimentovania zistíme, ako prenášať vežu z 3 diskov.

Ďalší krok v riešení problému je zaviesť vhodné označenie: *vhodne označ a zvíťaz*. Nech povedzme T_n je minimálny počet presunutí, ktorými prenesieme n diskov z jedného kolíka na druhý dodržiavajúc pritom Lucasove pravidlá. Potom zrejme $T_1 = 1$ a $T_2 = 3$.

Zadarmo môžeme získať ešte nejaké informácie, ak zoberieme najmenší prípad zo všetkých: samozrejme $T_0 = 0$. Rozumní matematici sa nehanbia myslieť v malom, pretože všeobecné prípady sú ľahšie pochopiteľné, keď dobre rozumieme extrémnym prípadom (aj keď sú triviálne).

Teraz sa ale snažme myslieť vo veľkom. Najprv prenesieme $n-1$ menších diskov na iný kolík (čo vyžaduje T_{n-1} presunov), potom prenesieme najväčší (čo vyžaduje 1 presun) a nakoniec preniesť $n-1$ menších diskov späť na väčší (čo vyžaduje ďalších T_{n-1} presunov). Teda n diskov vieme preniesť na najviac $2T_{n-1}+1$ presunov:

$$T_n \le 2T_{n-1} + 1, \quad \text{pre } n > 0.$$

V tomto vzťahu je zámerne použité ‚$\leq$'namiesto ‚='pretože náš spôsob ukazuje len, že $2T_{n-1}+1$ presunov stačí neukázali sme, že $2T_{n-1}+1$ je nevyhnutných. Niekto rozumnejší by mohol byť schopný vymyslieť postup vyžadujúci menej presunov.

Existuje ale lepší spôsob? V skutočnosti nie. V istej chvíli musíme presunúť najväčší disk. Keď ho budeme prenášať, $n-1$ menších diskov musí byť na jednom kolíku, na čo sme potrebovali aspoň T_{n-1} presunov. Ak nie sme príliš šikovný, môžeme presúvať najväčší disk aj viackrát. Ale po poslednom presune musíme presunúť menších $n-1$ diskov (ktoré musia byť opäť na jednom kolíku) späť na najväčší; čo zase vyžaduje T_{n-1} presunov. Teda

$$T_n \geq 2T_{n-1}+1, \quad \text{pre } n > 0.$$

Tieto dve nerovnosti, spolu s triviálnym riešením pre $n=0$ dávajú:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0; \\ T_n &= 2T_{n-1}+1, \quad \text{pre } n > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Všimnime si, že tieto vzťahy sú konzistné so známymi hodnotami $T_1 = 1$ a $T_2 = 3$.

Množina rovností sa nazýva *rekurencia*. Má základné hodnoty a rovnosť na výpočet všeobecnej hodnoty na základe predchádzajúcich. Niekedy sa odvolávame na samostanú všeobecnú rovnosť ako na rekurenciu, i keď niekedy z technického hľadiska, kvôli úplnosti, potrebujeme aj základné hodnoty.

Rekurencia nám umožňuje vypočítať T_n pre ľubovoľné n. Ale v skutočnosti, keď je n veľké, nik rád nepočíta priamo z rekurencie; trvá to pridlho. Rekurencia nám dáva len nepriamu „lokálnu" informáciu. Oveľa šťastnejšími nás spraví *riešenie rekurencie*. To je to, čo by sa nám páčilo, milý malý uzavretý tvar pre T_n, pomocou ktorého by sme mohli rýchlo počítať, hoci aj pre veľké n.

Ako teda riešime rekurencie? Jeden spôsob je uhádnuť správne riešenie a potom o ňom dokázať, že je naozaj správne. Ak chceme teda hádať, pozrime sa opäť na najmenšie prípady. Tak teda počítajme postupne: $T_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$; $T_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$; $T_5 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$; $T_6 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$. Aha, vyzerá to ako

$$T_n = 2^n - 1, \quad \text{pre } n \geq 0. \tag{2}$$

Každopádne to funguje aspoň pre $n \leq 6$.

Najvhodnejším spôsobom pre dôkaz správnosti riešenia je matematická indukcia. Spomínate si? Báza a indukčný predpoklad! Báza je triviálna, pretože $T_0 = 2^0 - 1 = 0$. A indukčný krok vyplýva pre $n > 0$, ak predpokladáme, že (2) platí, keď n nahradíme $n-1$:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1.$$

Teda (2) platí aj pre n. Dobré! Naše hľadanie T_n sa skončilo úspešne!

Ale práca kňazov sa naproti tomu neskončila. Ako oznámila tlačová agentúra ITKA, stále usilovne prenášajú disky a ešte chviľu aj budú, pretože pre $n = 64$ treba vykonať $2^{64} - 1$ presunov. A aj pri neuskutočniteľnej rýchlosti presúvania diskov, každú mikrosekundu 1 disk, by potrebovali viac než 5000 storočí na prenesenie celej Brahmovej veže. Lucasov pôvodný problém je trochu praktickejší. Vyžaduje $2^8 - 1 = 255$ presunov, čo zručnému trvá asi štyri minúty.

Naša analýza Hanojských veží nás doviedla k správnemu riešeniu, ale mali sme zrovna šťastie pri typovaní výsledku, ktorý sa ukázal ako správny. Jedným z hlavných cieľom tejto časti prednášok bude vysvetliť, ako sa dajú rekurencie riešiť (alebo aspoň asymptoticky odhadnúť) bez toho, aby sme boli jasnovidci. Napríklad uvidíme, že rekurenciu (1) môžeme zjednodušiť pripočítaním 1 k obom stranám rovnice:

$$\begin{aligned} T_0 + 1 &= 1; \\ T_n + 1 &= 2T_{n-1} + 2, \quad \text{pre } n > 0. \end{aligned}$$

Teraz, ak položíme $U_n = T_n + 1$, dostaneme

$$\begin{aligned} U_0 &= 1; \\ U_n &= 2U_{n-1}, \quad \text{pre } n > 0. \end{aligned}$$

A nemusíme byť zrovna génius nato, aby sme zistili, že riešenie tejto rekurencie je práve $U_n = 2^n$; teda $T_n = 2^n - 1$. Na to by snáď prišiel aj počítač.

Krátke zhrnutie

Rekurencia Hanojských veží je typická pre mnohé rekurencie, ktoré sa vyskytujú v aplikáciach všetkých druhov. Pri hľadaní uzavretých foriem pre zaujímavé veličiny vyzerajúce ako T_n, prechádzame tromi etapami:

1. Pozrieme sa na malé prípady. Čím vnikneme do problému a pomôže nám to (možno) v 2. a 3. etape.
2. Nájdeme a dokážeme matematický vzťah pre veličinu, ktorá nás zaujíma. V prípade Hanojských veží je to rekurencia (1), ktorá nám umožní vypočítať T_n pre každé n.
3. Nájdeme a dokážeme uzavretú formu pre náš matematický vzťah. Pre Hanojské veže je to riešenie rekurencie (2).

My sa budeme sústreďovať predovšetkým na tretiu etapu.

2. Priamky v rovine

Nasledujúci príklad má vôňu pravej talianske pizzy a príchuť artičokov: na koľko najviac kúskov možno rozrezať jeden kus pizzy keď budeme krájať n rovnými rezmi. (Kúsky nemusia byť rovnako veľké, to je zas iný známy problém spravodlivého delenia n ľudí. Poznáte jeho riešenie?)

Preformulujme úlohu matematickejšie: aký je maximálny počet L_n oblastí určených n priamkami v rovine? Ako prvý tento problém vyriešil roku 1826 švajčiarsky matematik Jacob Steiner.

Na začiatku sa opäť pozrieme na malé prípady, pričom nezabudneme ani na celkom najmenšie. Zrejme: $L_0 = 1$; $L_1 = 2$; $L_2 = 4$.

Po troche rozmýšľania s treťou priamkou ($L_3 = 7$) vykonáme vhodné zovšeobecnenie. n-tá priamka (pre $n > 0$) zvýši počet oblastí o k práve vtedy, keď pretne predchádzajúce priamky v $k - 1$ rôznych bodoch. Každá nová priamka môže preťať existujúcu priamku nanajvýš v jednom bode. Z tohoto dôvodu môže nová priamka pretnúť $n-1$ starých priamok v najviac $n-1$ rôznych bodoch a musí teda platiť $k \le n$. Získali sme horný odhad

$$L_n \le L_{n-1} + n, \quad \text{pre } n > 0.$$

Navyše sa dá ľahko nazrieť, že v tomto výraze môžeme dosiahnuť rovnosť. n-tú priamku umiestnime jednoducho tak, že nie je so žiadnou inou rovnobežná (teda ich všade pretína) a tak, aby neprechádzala cez žiaden ich priesečník (teda ich pretína všetky v navzájom rôznych bodoch). Rekurencia je preto:

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + n, \\ &= L_{n-2} + (n-1) + n, \\ &= L_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n, \\ &\vdots \\ &= L_0 + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n, \\ &= 1 + S_n, \quad \text{kde } S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n. \end{aligned} \tag{3}$$

Povedané ľudsky, L_n je o jedna viac než súčet S_n prvých n kladných celých čísel. Potrápime trochu pamäť s aritmetickou postupnosťou a spomenieme si, že $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Naše riešenie je teda

$$L_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1, \quad \text{kde } n \ge 0. \tag{4}$$

Ako odborníci môžeme byť s týmto odvodením spokojní a považovať ho za dôkaz, veď sme sa aj pri rozvíjaní a premýšľaní zapotili. Ale študenti matematiky by mali byť schopní dosahovať vyšší štandard, čo tak teda vytvoriť rigorózny dôkaz indukcie. Kľúčový indukčný krok je

$$L_n = L_{n-1} + n = \left(\frac{1}{2}(n-1)n + 1\right) + n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1.$$

Teraz nemôžu byť o našom výsledku žiadne pochybnosti.

Komentár

Na začiatku sme vraveli o uzavretých tvaroch bez toho, aby sme exaktne povedali, čo tým myslíme. Obyčajne je to celkom jasné. Rekurencie typu (1) a (3) nie sú v uzavretom tvare – vyjadrujú veličiny sami pomocou seba; ale riešenia typu (2) a (4) sú v uzavretom tvare. Sumy ako $1 + 2 + \cdots + n$ nie sú v uzavretom tvare – klamú „ ...“; ale výrazy typu $\frac{n(n+1)}{2}$ sú. Skúsme to definovať: výraz vyjadrujúci veličinu $f(n)$ je v uzavretom tvare, ak ho môžeme vypočítať nanajvýš s konštantným počtom „dobre známych“ štandardných operácií, nezávislých od n. Napríklad, $2^n - 1$ a $\frac{n(n+1)}{2}$ sú v uzavretom tvare, pretože vyžadujú explicitne len sčítanie, odčítanie, násobenie, delenie a umocňovanie.

Celkový počet jednoduchých uzavretých tvarov je obmedzený. Existujú rekurencie, ktoré nemajú jednoduché uzavreté tvary. Keď sa niektorá z týchto rekurencií bude ukazovať dôležitá, pretože sa bude opakovane vyskytovať, rozšírime náš repertoár o nové oprácie; týmto spôsobom môžeme široko rozšíriť škálu problémov, ktoré vieme vyriešiť v „jednoduchej“ uzavretej forme. Napríklad, súčin prvých n celých čísel, $n!$, sa ukázal byť dôležitý, tak ho budeme považovať za základnú operáciu.

Problém

Predstavme si, že namiesto priamok použijeme lomené čiary, každá s jedným cípom vytvárajúcim ostrý uhol. Aký je maximálny počet Z_n oblastí určených takýmito lomenými čiarami v rovine?

3. Jozefova úloha

Najskôr trochu histórie. Nasledujúca úloha bola pomenovaná po známom historikovi prvého storočia, Flaviusovi Jozefovi. Podľa legendy, by Flavius bez matematického nadania neprežil a nestal sa slávnym (a taktiež by nám nemohol porozprávať svoj príbeh). Počas Židovsko-Rímskej vojny, bol medzi 41 židovskými vzbúrencami, ktorých Rimania chytili do pasce v jaskyni. Vzbúrenci sa rozhodli, že radšej ako by sa vzdali, spáchajú organizovane samovraždu nasledovným spôsobom: vytvoria kruh a postupujúc v ňom krok po kroku každý tretí spácha samovraždu, až pokým nikto neostane. Ale Jozef ešte s jedným priateľom nesúhlasil s touto nezmyselnou samovraždou a rýchlo si vypočítal kam sa má on a jeho priateľ v začarovanom kruhu postaviť.

V našom variante začneme s n ľuďmi, očíslovanými v kruhu od 1 až po n a budeme z neho vylučovať každého druhého, pokým nezostane len jeden. Bojová úloha: určite číslo preživajúceho, označme si ho J_n.

Určime si pokusne J_{10}. A čo zisťujeme, že číslo 5 žije!!! A teraz ako obvykle, spočítajme si niekoľko malých hodnôt:

n	1	2	3	4	5	6
J_n	1	1	3	1	3	5

Zdá sa, že J_n je vždy nepárne číslo. A vskutku je preto dobrý dôvod: prvý prechod po kruhu vylúči všetky párne čísla.

Predpokladajme, že pôvodne máme $2n$ ľudí. Po prvom prejdení kruhu sa nám zredukoval počet ľudí na n. Vyriešme úlohu pre n, dostaneme číslo J_n. Vieme z tohto výsledku zrekonštruovať výsledok pre pôvodný počet? Samozrejme,

$$J_{2n} = 2J_n - 1, \quad \text{pre } n \geq 1.$$

A čo v nepárnom prípade? V prípade $2n+1$ ľudí sa ukáže, že osoba číslo 1 je vylúčená po osobe číslo $2n$. Analogicky ako v predchádzajúcom prípade dostávame sa do počiatočnej situácie s n ľuďmi. Vyriešime úlohu pre n a zistíme, že tentoraz sú ich čísla dvojnásobné a zvýšené o 1. Teda

$$J_{2n+1} = 2J_n + 1, \quad \text{pre } n \geq 1.$$

Skombinovaním týchto rovníc s $J_1 = 1$ dostaneme rekurenciu, ktorá definuje J vo všetkých prípadoch:

$$\begin{aligned} J_1 &= 1, \\ J_{2n} &= 2J_n - 1, \quad \text{pre } n \geq 1, \\ J_{2n+1} &= 2J_n + 1, \quad \text{pre } n \geq 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Táto rekurencia je oveľa efektívnejšia ako predchádzajúce, pretože pri každom použití zmenšuje n dva alebo viackrát. Mohli by sme vypočítať, povedzme $J(10000000)$ len 18-násobným použitím (5). Ale pretože život je tak krásny, ešte stále hľadáme uzavretú formulu, pretože pomocou nej to bude ešte rýchlejšie a o mnoho poučnejšie. Koniec koncov, je to otázka života a smrti.

Pri pohľade na (5) nás však nič múdre nenapadá a tak si skúsme rozpísať viacej hodnôt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
J_n	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Ej, hľa ... Začína nám svitať. Zdá sa, že môžeme vytvoriť skupiny podľa mocnín 2 (v tabuľke oddelené zvislými čiarami); J_n je na začiatku skupiny vždy 1 a postupne sa v rámci skupiny zväčšuje o 2. Teda ak si napíšeme n v tvare $n = 2^m + l$, kde 2^m je najväčšia mocnina 2 neprevyšujúca n a l je to, čo ostalo, riešenie našej rekurencie vyzerá potom takto:

$$J_{2^m+l} = 2l + 1, \quad \text{pre } m \geq 0 \text{ a } 0 \leq l < 2^m. \tag{6}$$

Pre našu úplnu spokojnosť musíme ešte vzťah (6) dokázať. Ako aj predtým, použijeme indukciu, tentokrát vzhľadom na m (t.j. na celú skupinu 2^m, $2^m{+}1$, $2^m{+}2$, ... , $2^m{+}2^m{-}1$). Keď $m = 0$, tak musí byť $l = 0$ a báza sa redukuje len na $J_1 = 1$, čo zrejme platí. Indukčný krok má dve časti v závislosti od toho, či je l párne alebo nepárne. Ak $m > 0$ a $2^m + l = 2n$, tak potom je l párne a

$$J_{(2^m+l)} = 2J_{(2^{m-1}+l/2)} - 1 = 2(2 \cdot l/2 + 1) - 1 = 2l + 1,$$

podľa (5) a indukčného predpokladu, čo sme vlastne chceli. Podobný dôkaz zaberie i v prípade nepárneho l. (Skúste si to, či ste ešte nezabudli indukciu.)

Tak, či onak, indukcia je kompletná a výsledok (6) nepopierateľný.

Elegantnejší prístup

Teraz si môžme prezradiť, že existuje aj elegantnejšie riešenie uvedeného problému. Kľúčovým je fakt, že $J_{2^m} = 1$ pre všetky m. Vo všeobecnom prípade, keď $n = 2^m + l$ sa počet osôb zmení na mocninu 2 potom, ako vylúčime z kruhu l osôb. Osoba, ktorá je na rade prežije a jej číslo je práve $2l + 1$.

Magický súvis s dvojkovou sústavou

V našom hľadaní riešenia hrajú dôležitú úlohu mocniny 2, takže je len prirodzené pozrieť si binárnu reprezentáciu n a J_n. Uvažujme binárny zápis n

$$n = (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2;$$

to je

$$n = b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \dots + b_1 2 + b_0,$$

kde každé b_i je buď 0 alebo 1 a vedúci bit b_m je 1. Ak si spomenieme, že $n = 2^m + l$, dostaneme,

$$\begin{aligned} n &= (1 b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0)_2, \\ l &= (0 b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0)_2, \\ 2l &= (b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0 0)_2, \\ 2l + 1 &= (b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0 1)_2, \\ J_n &= (b_{m-1} b_{m-2} \dots b_1 b_0 b_m)_2, \end{aligned}$$

Dokázali sme teda, že

$$J((b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_2) = (b_{m-1} \dots b_1 b_0 b_m)_2,$$

čo v reči programátorov znamená, že J_n dostaneme z n cyklickým posunom o jeden bit doľava! Magické. Napríklad, ak $n = 100 = (1100100)_2$, tak $J_n = J((1100100)_2) = (1001001)_2$, čo je 73. Keby sme pracovali celý čas v dvojkovej sústave, pravdepodobne by sme si to všimli hneď.

Literatúra

Uvedená kapitola je voľným prekladom časti 1.kapitoly knihy R. Grahama, D. E. Knutha a O. Patashnika: *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989.