Metódy riešenia rekurentných rovníc

V knihe „Liber Abaci“, ktorá sa objavila v roku 1202 uviedol taliansky matematik Leonardo Pisanský, zvaný Fibonacci, túto úlohu:

Pár králikov privádza jedenkrát za mesiac na svet dve mláďatá (samčeka a samičku), ktorí prinášajú ďalšie prírastky už za dva mesiace po svojom narodení. Koľko králikov sa objaví za rok ak predpokladáme, že na začiatku roku bol jeden pár králikov.

Označme F_n symbolom počet králikov po n mesiacoch od začiatku roku. Vidíme, že za $n+1$ mesiacov budeme mať týchto F_n párov a naviac ešte toľko novorodených párov králikov, koľko ich bolo na konci $(n-1)$-ého mesiaca, t.j. F_{n-1}. Dostávame teda rekurentný vzorec:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n > 1 \tag{1}$$

Počiatočné podmienky $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Ako ale vyzerá uzavretá formula pre F_n, tzv. n-té Fibonacciho číslo?

Ak $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$, $\{b_0, b_1, \dots, b_n, \dots\}$ sú riešením (1), potom aj súčet, resp. násobok skalárom z R je riešením (1). Teda priestor riešení (1) je vektorový priestor nad R. Aká je jeho dimenzia? Voľbou prvých dvoch členov máme jednoznačne určenú celú postupnosť, dimenzia je teda 2.

Skúsme hľadať riešenie F_n v tvare r^n pre nejaké $r \in R$. Po prepise (1) dostávame

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}, \qquad n > 1.$$

Prípad $r = 0$ je nezaujímavý, po vydelení r^{n-2} dostávame: $r^2 = r + 1$ s koreňmi $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ani jedno s uvedených riešení nesplňa inicializačné podmienky úlohy, podľa úvodných úvah však ľubovoľná lineárna kombinácia koreňov r_1 a r_2 je tiež riešením. Hľadáme teda λ, μ také, že

$$\begin{aligned} \lambda r_1^0 + \mu r_2^0 &= F_0 = 0, \\ \lambda r_1^1 + \mu r_2^1 &= F_1 = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Riešením systému (2) zistíme, že $\lambda = -\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Dostávame teda riešenie (1) v tvare:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

A ako obvykle, nasleduje skúška správnosti matematickou indukciou.

Riešenie lineárnych rovníc s konštantnými koeficientami

Uvažujme lineárnu homogénnu rovnicu (t.j. s konštantnými koeficientami) v tvare:

$$(3)\quad \begin{array}{l} u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k},\ \text{pre } n \geq k, \quad \textbf{(induktívna rovnica)} \\ u_i = b_i,\ \text{pre } 0 \leq i < k, \quad \textbf{(inicializačné podmienky)} \end{array}$$

Označme $P(r) = r^k - \sum_{j=1}^{k} a_j r^{k-j}$ charakteristický polynóm k-teho rádu induktívnej rovnice a $P(r) = 0$ jej charakteristickú rovnicu. Korene $P(r)$ nazývame charakteristické korene.

Podľa úvodného príkladu ak vieme nájsť všetky korene charakteristickej rovnice, potom vieme nájsť aj uzavretú formu lineárnej rekurencie (3).

Podľa základnej vety algebry má charakteristická rovnica k-teho rádu najviac k koreňov v R (nad komplexnými číslami práve k).

Veta. *1. Ak charakteristická rovnica má k rôznych koreňov $r_1, r_2, \ldots, r_k$, potom rekurencia (2) má riešenie tvaru*

$$u_n = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j r_j^n$$

kde λ_i sú riešenia systému lineárnych rovníc:

$$b_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j r_j^i,\ \text{pre } 0 \leq i < k.$$

2. Ak charakteristická rovnica má p rôznych koreňov $r_1, \ldots, r_p$, $p < k$ a koreň r_j má násobnosť $m_j \geq 1$, potom

$$r_j^n, n r_j^n, n^2 r_j^n, \ldots, n^{m_j - 1} r_j^n$$

sú tiež riešenia induktívnej rovnice a existuje riešenie spĺňajúce inicializačné podmienky v tvare:

$$u_n = \sum_{j=1}^{p} P_j(n) r_j^n,$$

kde $P_j(n)$ je polynóm stupňa $(m_j - 1)$, koeficienty ktorého môžu byť obdržané ako jednoznačné riešenie systému lineárnych rovníc:

$$b_i = \sum_{j=1}^{p} P_j(i) r_j^i,\ 0 \leq i < k.$$

Príklad. Riešte rekurentnú rovnicu

$$u_n = 5u_{n-1} - 8u_{n-2} + 4u_{n-3},\ n \geq 3$$

s inicializačnými podmienkami: $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = 2$.

Koreňmi charakteristickej rovnice $r^3 = 5r^2 - 8r + 4$ sú $r_1 = 1$ a $r_2 = 2$ násobnosti 2. Riešenie je teda tvaru:

$$u_n = a + 2^n(b + cn),$$

kde a, b, c spĺňajú systém rovníc:

$$\begin{aligned} 0 &= a + (b + c \cdot 0) \cdot 2^0, \\ -1 &= a + (b + c) \cdot 2, \\ 2 &= a + (b + c \cdot 2) \cdot 2^2. \end{aligned}$$

Riešenie: $u_n = 6 + 2^n(-6 + \frac{5}{2}n)$.

Asymptotické porovnávanie funkcií

Keď nie sme schopní nájsť uzavretú formulu pre rekurenciu, zaujíma nás aspoň jej „odhad", t.j. ako rýchlo rastie n-tý člen postupnosti. Zaujíma nás horný, dolný, resp. stredný odhad.

Nech f, g sú reálne funkcie jednej premennej definované na prirodzených číslach, pričom predpokladáme, že hodnoty f a g sú nezáporné.

Funkcia $f(n)$ je **horným odhadom funkcie** $g(n)$, formálne $g(n) = O(f(n))$, ak existujú čísla C a n_0 také, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $|f(n)| \leq Cg(n)$. Napríklad $10n^2+5n = O(n^2)$. Zápisu $f(n) = g(n) + O(n^3)$ sa má rozumieť tak, že funkcia f rastie rovnako rýchlo ako g, až na chybu rádu n^3. Jednoduchý príklad je $\binom{n}{2} = n(n-1)/2 = n^2/2 + O(n)$. Aj keď sa v tomto zápise vyskytuje rovnosť, zápis je nesymetrický, pretože je to v svojej podstate nerovnosť, t.j. nie $O(g(n)) = f(n)$.

Funkcia $f(n)$ je **dolným odhadom funkcie** $g(n)$, formálne $g(n) = \Omega(f(n))$, ak existujú čísla $C > 0$ a n_0 také, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $Cg(n) \leq f(n)$.

Nie všetky funkcie rastú rovnako rýchlo, niektoré rastú nekonečne rýchlejšie než iné, formálne:

$$f(n) \prec g(n) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Prehľad bežne používaných obdobných značení:

$f(n) = o(g(n))$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$	f rastie podstatne pomalšie ako g
$f(n) = \Omega(g(n))$	$g(n) = O(f(n))$	f rastie aspoň tak rýchlo ako g
$f(n) = \theta(g(n))$	$f(n) = O(g(n))$ a $f(n) = \Omega(g(n))$	f a g rastú rádovo rovnako rýchlo
$f(n) \sim g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$	f a g rastú asi rovnako rýchlo

Základné vlastnosti:

$$n^{\alpha} \prec n^{\beta} \Longleftrightarrow \alpha < \beta \text{ pre } \alpha, \beta \in N$$
$$f(n) \prec g(n) \Longleftrightarrow \frac{1}{g(n)} \prec \frac{1}{f(n)}, f(n) \text{ a } g(n) \text{ nenulové}$$
$$1 \prec f(n) \prec g(n) \Longleftrightarrow e^{|f(n)|} \prec e^{|g(n)|}$$
$$f(n) = O(f(n))$$
$$c \cdot O(f(n)) = O(f(n)), c \text{ konštanta}$$
$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n))$$
$$O(f(n)g(n)) = O(f(n))O(g(n))$$
$$\log f(n) \prec \log g(n) \implies f(n) \prec g(n)$$

Príklady ($0 < \varepsilon < 1 < c$):

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec n^{\varepsilon} \prec n^{c} \prec n^{\log n} \prec c^{n} \prec n^{n} \prec c^{c^{n}}$$