2. Metódy riešenia rekurentných rovníc

Riešenie lineárnych homogénnych rovníc s konštantnými koeficientami

Príklad na úvod.

V knihe „Liber Abaci“, ktorá sa objavila v roku 1202 uviedol taliansky matematik Leonardo Pisanský, zvaný Fibonacci, túto úlohu:

Pár králikov privádza jedenkrát za mesiac na svet dve mláďatá (samčeka a samičku), ktorí prinášajú ďalšie prírastky už za dva mesiace po svojom narodení. Koľko králikov sa objaví za rok ak predpokladáme, že na začiatku roku bol jeden pár králikov.

Označme F_n symbolom počet králikov po n mesiacoch od začiatku roku. Vidíme, že za $n+1$ mesiacov budeme mať týchto F_n párov a naviac ešte toľko novorodených párov králikov, koľko ich bolo na konci $(n-1)$-ého mesiaca, t.j. F_{n-1}. Dostávame teda rekurentný vzorec:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n > 1 \tag{2.1}$$

Počiatočné podmienky $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Ako ale vyzerá uzavretá formula pre F_n, tzv. n-té Fibonacciho číslo?

Ak $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$, $\{b_0, b_1, \dots, b_n, \dots\}$ sú riešením (2.1), potom aj súčet, resp. násobok skalárom z R je riešením (2.1). Teda priestor riešení (2.1) je vektorový priestor nad R. Aká je jeho dimenzia? Voľbou prvých dvoch členov máme jednoznačne určenú celú postupnosť, dimenzia je teda 2.

Skúsme hľadať riešenie F_n v tvare r^n pre nejaké $r \in R$. Po prepise (2.1) dostávame

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}, \qquad n > 1.$$

Prípad $r = 0$ je nezaujímavý, po vydelení r^{n-2} dostávame: $r^2 = r + 1$ s koreňmi $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ani jedno s uvedených riešení nespĺňa inicializačné podmienky úlohy, podľa úvodných úvah však ľubovoľná lineárna kombinácia koreňov r_1 a r_2 je tiež riešením. Hľadáme teda λ, μ také, že

$$\begin{aligned} \lambda r_1^0 + \mu r_2^0 &= F_0 = 0, \\ \lambda r_1^1 + \mu r_2^1 &= F_1 = 1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Riešením systému (2.2) zistíme, že $\lambda = -\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Dostávame teda riešenie (2.1) v tvare:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

A ako obvykle, nasleduje skúška správnosti matematickou indukciou.

Zobecnenie predchádzajúceho:

Uvažujme lineárnu homogénnu rovnicu (t.j. s konštantnými koeficientami) v tvare:

(2.3)
$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k}, \text{ pre } n \ge k, \quad \textbf{(induktívna rovnica)}$$
$$u_i = b_i, \text{ pre } 0 \le i < k, \quad \textbf{(inicializačné podmienky)}$$

Označme $P(r) = r^k - \sum_{j=1}^{k} a_j r^{k-j}$ charakteristický polynóm k-teho rádu induktívnej rovnice a $P(r) = 0$ jej charakteristickú rovnicu. Korene $P(r)$ nazývame charakteristické korene.

Podľa úvodného príkladu ak vieme nájsť všetky korene charakteristickej rovnice, potom vieme nájsť aj uzavretú formu lineárnej rekurencie (2.3).

Podľa základnej vety algebry má charakteristická rovnica k-teho rádu najviac k koreňov v R (nad komplexnými číslami práve k).

Veta. *1. Ak charakteristická rovnica má k rôznych koreňov $r_1, r_2, \ldots, r_k$, potom rekurencia* (2.2) *má riešenie tvaru*

$$u_n = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j r_j^n$$

kde λ_i sú riešenia systému lineárnych rovníc:

$$b_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j r_j^i, \text{ pre } 0 \le i < k.$$

2. Ak charakteristická rovnica má p rôznych koreňov $r_1, \ldots, r_p$, $p < k$ a koreň r_j má násobnosť $m_j \ge 1$, potom

$$r_j^n, n r_j^n, n^2 r_j^n, \ldots, n^{m_j - 1} r_j^n$$

sú tiež riešenia induktívnej rovnice a existuje riešenie spĺňajúce inicializačné podmienky v tvare:

$$u_n = \sum_{j=1}^{p} P_j(n) r_j^n,$$

kde $P_j(n)$ je polynóm stupňa $(m_j - 1)$, koeficienty ktorého môžu byť obdržané ako jednoznačné riešenie systému lineárnych rovníc:

$$b_i = \sum_{j=1}^{p} P_j(i) r_j^i, \ 0 \le i < k.$$

Príklad. Riešte rekurentnú rovnicu

$$u_n = 5u_{n-1} - 8u_{n-2} + 4u_{n-3}, \ n \ge 3$$

s inicializačnými podmienkami: $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = 2$.

Koreňmi charakteristickej rovnice $r^3 = 5r^2 - 8r + 4$ sú $r_1 = 1$ a $r_2 = 2$ násobnosti 2. Riešenie je teda tvaru:

$$u_n = a + 2^n(b + cn),$$

kde a, b, c spĺňajú systém rovníc:

$$\begin{aligned} 0 &= a + (b + c \cdot 0) \cdot 2^0, \\ -1 &= a + (b + c) \cdot 2, \\ 2 &= a + (b + c \cdot 2) \cdot 2^2. \end{aligned}$$

Riešenie: $u_n = 6 + 2^n(-6 + \frac{5}{2}n)$.

Malé zobecnenie Jozefovej úlohy

Skúsme riešiť podobnú rekurenciu ako v Jozefovej úlohe, ale so zavedenými konštantami α, β a γ. Ako bude riešenie vyzerať teraz?

$$\begin{aligned} f(1) &= \alpha, \\ f(2n) &= 2f(n) + \beta, \quad \text{pre } n \geq 1, \\ f(2n+1) &= 2f(n) + \gamma, \quad \text{pre } n \geq 1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Náš pôvodný problém bol pre $\alpha = 1$, $\beta = -1$ a $\gamma = 1$. Začnúc s $f(1) = \alpha$ a pokračujúc ďalej môžeme vytvoriť nasledujúcu všeobecnú tabuľku pre malé hodnoty n:

n	$f(n)$
1	α
2	$2\alpha + \beta$
3	$2\alpha + \gamma$
4	$4\alpha + 3\beta$
5	$4\alpha + 2\beta + \gamma$
6	$4\alpha + \beta + 2\gamma$
7	$4\alpha + 3\gamma$
8	$8\alpha + 7\beta$
9	$8\alpha + 6\beta + \gamma$

Zdá sa, že koeficient pri α je najväčšia mocnina 2 v n. A ďalej, že medzi mocninami 2 koeficienty pri β klesajú po 1 k 0 a koeficienty pri γ rastú po 1 od 0. Preto, ak vyjadríme $f(n)$ v tvare

$$f(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma, \tag{2.5}$$

a vylúčime jeho závislosť na α, β a γ ukazuje sa, že:

$$\begin{aligned} A(n) &= 2^m, \\ B(n) &= 2^m - 1 - l, \\ C(n) &= l. \end{aligned}$$

Ako obyčajne, $n = 2^m + l$ a $0 \le l < 2^m$, pre $n \ge 1$.

Uvedenú skutočnosť nie je ani príliš ťažké dokázať indukciou, ale my to robiť nebudeme. Namiesto toho si ukážeme iný spôsob, ako riešiť rekurenciu (2.4): voľbou špeciálnych hodnôt a ich vzájomnou kombináciou. Ilustrujme to uvážením špeciálneho prípadu $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$, kedy sa $f(n)$ musí rovnať $A(n)$. Rekurencia (2.4) potom vyzerá takto:

$$\begin{aligned} A(1) &= 1, \\ A(2n) &= 2A(n), \quad \text{pre } n \ge 1, \\ A(2n+1) &= 2A(n), \quad \text{pre } n \ge 1. \end{aligned}$$

A skutočne je pravda (indukciou vzhľadom na m), že $A(2^m + l) = 2^m$.

V ďalšom kroku začneme s nejakou jednoduchou funkciou $f(n)$ a budeme hľadať konštanty (α, β, γ), ktorými je definovaná. Dosadením konštantnej funkcie $f(n) = 1$ dostaneme, že

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha, \\ 1 &= 2 \cdot 1 + \beta, \\ 1 &= 2 \cdot 1 + \gamma, \end{aligned}$$

a teda hodnoty $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, -1)$ spĺňajúce tieto rovnice nám dajú

$$A(n) - B(n) - C(n) = f(n) = 1.$$

Podobne môžme dosadiť $f(n) = n$:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha, \\ 2n &= 2n + \beta, \\ 2n+1 &= 2n + \gamma, \end{aligned}$$

Tieto rovnice platia pre všetky n, keď $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 1)$.

A v podstate sme hotoví! Ukázali sme, že funkcie $A(n)$, $B(n)$ a $C(n)$ z (2.5), ktoré sú riešením (2.4) vo všeobecnosti, spĺňajú rovnice:

$$\begin{aligned} A(n) &= 2^m, \quad \text{pre } n = 2^m + l \text{ a } \ 0 \le l < 2^m, \\ A(n) - B(n) - C(n) &= 1, \\ A(n) + C(n) &= n. \end{aligned}$$

Riešením uvedenej sústavy dostávame známe riešenie.

Tento prístup ilustruje prekvapivo užitočnú metódu *neurčitých koeficientov*. Najprv si zvolíme hodnoty parametrov, pre ktoré poznáme riešenie, tým dostaneme zoznam špeciálnych prípadov, ktoré máme vyriešiť. Kombináciou špeciálnych prípadov potom získame všeobecný prípad. Potrebujeme toľko nezávislých riešení špeciálnych prípadov, koľko je nezávislých parametrov (v tomto prípade sú tri α, β, γ).

Asymptotické porovnávanie funkcií

Keď nie sme schopní nájsť uzavretú formulu pre rekurenciu, zaujíma nás aspoň jej „odhad“, t.j. ako rýchlo rastie n-tý člen postupnosti. Zaujíma nás horný, dolný, resp. stredný odhad.

Nech f, g sú reálne funkcie jednej premennej definované na všetkých prirodzených číslach (vo väčšine prípadov budú funkcie f a g nezáporné).

Ak píšeme $f \leq g$ znamená to, že $f(n) \leq g(n)$ pre všetky $n \in N$. Ale ak uvažujeme funkcie $f(n) = 5n$ a $g(n) = n^2$, potom zrejme neplatí ani $f(n) \leq g(n)$ ani $f(n) \geq g(n)$ pre všetky $n \in N$. V skutočnosti ale g rastie podstatne rýchlejšie ako f, až na niekoľko prvých n hodnôt.

V matematike a v informatike, funkcie definované na prirodzených číslach sú obvykle porovnávané podľa správania, keď n ide do nekonečna a správanie pre malé n je ignorované. Tento prístup je obvykle nazývaný *asymptotická analýza* uvažovaných funkcií. Hovoríme tiež o asymptotickom správaní, alebo asymptotike nejakej funkcie, majúc na mysli jej porovnanie pre nejaké jednoduché funkcie pre $n \to \infty$.

Zavedieme značenie $f \preceq g$, ak existuje nejaké n_0 tak, že nerovnosť $f(n) \leq g(n)$ platí pre všetky $n \geq n_0$, napríklad $5n \preceq n^2$.

Funkcia $g(n)$ je **horným odhadom funkcie** $f(n)$, formálne $f(n) = O(g(n))$, ak existuje číslo C také, že platí $f(n) \leq Cg(n)$. Napríklad $10n^2 + 5n = O(n^2)$. Zápisu $f(n) = g(n) + O(n^3)$ sa má rozumieť tak, že funkcia f rastie rovnako rýchlo ako g, až na chybu rádu n^3. Jednoduchý príklad je $\binom{n}{2} = n(n-1)/2 = n^2/2 + O(n)$.

Pozor, aj keď sa v tomto zápise vyskytuje rovnosť, zápis je nesymetrický, pretože je to v svojej podstate nerovnosť, t.j. nie $O(g(n)) = f(n)$.

Funkcia $g(n)$ je **dolným odhadom funkcie** $f(n)$, formálne $f(n) = \Omega(g(n))$, ak existuje číslo $C > 0$ že pre všetky $n \geq n_0$ platí $Cg(n) \leq f(n)$.

Prehľad bežne používaných obdobných značení:

$f(n) = o(g(n))$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$	f rastie podstatne pomalšie ako g
$f(n) = \theta(g(n))$	$f(n) = O(g(n))$ a $f(n) = \Omega(g(n))$	f a g rastú rádovo rovnako rýchlo
$f(n) \sim g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$	f a g rastú asi rovnako rýchlo

Základné vlastnosti:

$$n^\alpha \prec n^\beta \iff \alpha < \beta \text{ pre } \alpha, \beta \in N$$

$$f(n) \prec g(n) \iff \frac{1}{g(n)} \prec \frac{1}{f(n)}, f(n) \text{ a } g(n) \text{ nenulové}$$

$$1 \prec f(n) \prec g(n) \iff e^{|f(n)|} \prec e^{|g(n)|}$$

$$f(n) = O(f(n))$$

$$c \cdot O(f(n)) = O(f(n)), c \text{ konštanta}$$

$$O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n))$$
$$O(f(n)g(n)) = O(f(n))O(g(n))$$
$$\log f(n) \prec \log g(n) \implies f(n) \prec g(n)$$

Príklady ($0 < \varepsilon < 1 < c$):

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec n^{\varepsilon} \prec n^{c} \prec n^{\log n} \prec c^{n} \prec n^{n} \prec c^{c^{n}}$$

Literatúra

Cormen, Leiserson, Rivest: Algorithms
Aho, Hopcroft, Ullman: Data Structures and Algorithms
Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil: Invitation to Discrete Mathematics, Clarendon Press, Oxford, 1998.