Asymptotické riešenia rekurentných rovníc

Motivácia Mergersortu ako príkladu metódy rozdeľuj a panuj:

- najskôr rozdelíme postupnosť na 2 podpostupnosti dĺžky ktorých sa líšia najviac o 1
- utriedime rekurentne obe podpostupnosti
- nakoniec utriedime 2 (už utriedené) postupnosti

Pre počet porovnaní platí rekurencia:

$$\begin{aligned} &f(1) = 0, \\ &f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, n > 1. \end{aligned}$$

Dá sa ukázať, že $f(n) = n\lceil \log_2 n \rceil - 2^{\lceil \log_2 n \rceil} + 1$.

Všetky algoritmy typu „rozdeľuj a panuj“ sledujú nasledujúcu schému: Uvažujme problém P veľkosti $n = b^k$, pre $b \in N$.

- dekompozícia P v čase $c_1 n$ na b podproblémov rovnakého typu veľkosti $\frac{n}{b}$
- riešenie všetkých podproblémov rekurzívne použitím rovnakej metódy
- kombinovanie v čase $c_2 n$ riešenia P z riešení všetkých podproblémov

Zobecnená rekurencia vyplyvajúca z predchádzajúcej metódy „rozdeľuj a panuj“, $a \geq 1$, $b > 1$ konštanty, f funkcia:

$$\begin{aligned} &T(1) = \theta(1), \\ &T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n), n > 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Lemma 1. *Nech $a \geq 1$, $b > 1$ sú konštanty, $f(n)$ nezáporná funkcia definovaná na mocninách b. Definujme $T(n)$ na mocninách b rekurenciou*

$$\begin{aligned} &T(n) = \theta(1), \ \ ak\ n = 1, \\ &T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n), \ \ ak\ n = b^i, i \in N. \end{aligned}$$

Potom

$$T(n) = \theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right).$$

Dôkaz. Po úpravách

$$\begin{aligned} T(n) &= f(n) + aT\left(\frac{n}{b}\right) \\ &= f(n) + af\left(\frac{n}{b}\right) + a^2 T\left(\frac{n}{b^2}\right) \\ &= f(n) + af\left(\frac{n}{b}\right) + a^2 f\left(\frac{n}{b^2}\right) + \cdots + a^{\log_b n - 1} f\left(\frac{n}{b^{\log_b n - 1}}\right) + a^{\log_b n} T(1). \end{aligned}$$

Pretože $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$, posledný výraz je rovný:

$$a^{\log_b n} T(1) = \theta(n^{\log_b a}).$$

Po dosadení dostávame:

$$T(n) = \theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right).$$

♠

Hodnota $\theta(n^{\log_b a})$ odpovedá cene riešenie podproblémov (suma listov rekurzívneho stromu), hodnota $\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)$ odpovedá cene rozkladu (suma vnútorných vrcholov rekurzívneho stromu).

Lemma 2. *Nech $a \geq 1$, $b > 1$ sú konštanty, $f(n)$ nezáporná funkcia definovaná na mocninách b. Funkcia $g(n)$ definovaná na mocninách b vzťahom*

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)$$

môže byť ohraničená asymptoticky pre mocniny b nasledujúco:

1. Ak $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pre nejakú konštantu $\varepsilon > 0$, potom $g(n) = O(n^{\log_b a})$.

2. Ak $f(n) = \theta(n^{\log_b a})$, potom $g(n) = \theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$.

3. Ak $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ pre nejakú konštantu $c < 1$ a všetky $n \geq b$, potom $g(n) = \theta(f(n))$.

Dôkaz. 1. Ak $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, potom $f\left(\frac{n}{b^j}\right) = O\left(\left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a - \varepsilon}\right)$. Úpravami dostávame:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a - \varepsilon} &= n^{\log_b a - \varepsilon} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} \left(\frac{ab^\varepsilon}{b^{\log_b a}}\right)^j \\
&= n^{\log_b a - \varepsilon} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} (b^\varepsilon)^j \\
&= n^{\log_b a - \varepsilon} \left(\frac{b^{\varepsilon \log_b n} - 1}{b^\varepsilon - 1}\right) \\
&= \left(\frac{n^\varepsilon - 1}{b^\varepsilon - 1}\right)
\end{aligned}$$

Pretože b a ε sú konštanty, môžme odhadnúť $n^{\log_b a - \varepsilon} O(n^\varepsilon) = O(n^{\log_b a})$, čím dostávame: $g(n) = O(n^{\log_b a})$.

2. Za predpokladu $f(n) = \theta(n^{\log_b a})$, dostávame: $f\left(\frac{n}{b^j}\right) = \theta\left(\left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a}\right)$. Úpravami dostávame:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a} &= n^{\log_b a} \sum_{j=0}^{\log_b n-1} \left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^j \\ &= n^{\log_b a} \sum_{j=0}^{\log_b n-1} 1 \\ &= n^{\log_b a} \log_b n.\end{aligned}$$

Substitúciou do sumy dostávame:

$$g(n) = \theta(n^{\log_b a} \log_b n) = \theta(n^{\log_b a} \log_2 n).$$

3. Pretože $f(n)$ sa objavuje v definícii $g(n)$ a všetky členy $g(n)$ sú kladné, dostávame: $g(n) = \Omega(f(n))$ pre mocniny b. Z predpokladu: $af\left(\frac{n}{b}\right) \le cf(n)$ pre nejaké $c < 1$ a všetky $n \ge b$ máme: $a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) \le c^j f(n)$. Úpravami dostávame:

$$\begin{aligned}g(n) &= a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) \\ &\le \sum_{j=0}^{\log_b n-1} c^j f(n) \\ &\le f(n) \sum_{j=0}^{\infty} c^j \\ &= f(n)\left(\frac{1}{1-c}\right) \\ &= O(f(n))\end{aligned}$$

Spojením oboch úvah dostávame: $g(n) = \theta(f(n))$ pre mocniny b.

♠

Lema 3. *Nech $a \ge 1$, $b > 1$ sú konštanty, $f(n)$ je nezáporná funkcia definovaná na mocninách b. Definujme $T(n)$ na mocninách b rekurenciou*

$$\begin{aligned}T(n) &= \theta(1),\ \ ak\ n = 1, \\ T(n) &= aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),\ \ ak\ n = b^i,\ \ i \in N.\end{aligned}$$

Potom $T(n)$ môže byť ohraničené asymptoticky:

1. Ak $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pre nejakú konštantu $\varepsilon > 0$, potom $T(n) = \theta(n^{\log_b a})$.

2. Ak $f(n) = \theta(n^{\log_b a})$, potom $T(n) = \theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$.

3. Ak $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ pre nejakú konštantu $\varepsilon > 0$, a ak $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ pre nejakú konštantu $c < 1$ a všetky dostatočne veľké n, potom $T(n) = \theta(f(n))$.

Dôkaz. 1. Z lemy 1 a 2 dostávame:

$$T(n) = \theta(n^{\log_b a}) + O(n^{\log_b a}) = \theta(n^{\log_b a}).$$

2. Z lemy 1 a 2 dostávame:

$$T(n) = \theta(n^{\log_b a}) + \theta(n^{\log_b a}\log_2 n) = \theta(n^{\log_b a}\log_2 n).$$

3. Podmienka $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ implikuje $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ (dokázať za DÚ), čím z lemy 1 a 2 dostávame:

$$T(n) = \theta(n^{\log_b a}) + \theta(f(n)) = \theta(f(n)).$$

♠

Master Theorem. *Nech $a \geq 1$, $b > 1$ sú konštanty, $f(n)$ funckia a nech*

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n),$$

kde $\frac{n}{b}$ interpretujeme ako $\lceil\frac{n}{b}\rceil$ alebo $\lfloor\frac{n}{b}\rfloor$. Potom $T(n)$ môže byť ohraničené asymptoticky:
1. Ak $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ pre nejakú konštantu $\varepsilon > 0$, potom $T(n) = \theta(n^{\log_b a})$.
2. Ak $f(n) = \theta(n^{\log_b a})$, potom $T(n) = \theta(n^{\log ba}\log_2 n)$.
3. Ak $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ pre nejakú konštantu $\varepsilon > 0$, a ak $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ pre nejakú konštantu $c < 1$ a všetky dostatočne veľké n, potom $T(n) = \theta(f(n))$.

Dôkaz. Dá sa dokázať na základe výsledkov Lemy 3 a odhadmi na celé časti čísel.

♠

Pre spomínaný prípad mergesortu (za predpokladu $f(n) = n - 1$, $a = 2$, $b = 2$) dostávame odhad $\theta(n\log_2 n)$.

Literatúra

Cormen, Leiserson, Rivest: Introduction to Algorithms, 1990.