3. Asymptotické riešenia rekurentných rovníc

Motivácia Mergersortu ako príkladu metódy rozdeľuj a panuj:

- najskôr rozdelíme postupnosť na 2 podpostupnosti dĺžky ktorých sa líšia najviac o 1
- utriedime rekurentne obe podpostupnosti
- nakoniec utriedime 2 (už utriedené) postupnosti

Pre počet porovnaní platí rekurencia:

$$\begin{aligned} &f(1) = 0, \\ &f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, n > 1. \end{aligned}$$

Dá sa ukázať, že $f(n) = n\lceil \log_2 n \rceil - 2^{\lceil \log_2 n \rceil} + 1$.

Všetky algoritmy typu „rozdeľuj a panuj“ sledujú nasledujúcu schému: Uvažujme problém P veľkosti $n = b^k$, pre $b \in N$.

- dekompozícia P v čase $c_1 n$ na b podproblémov rovnakého typu veľkosti $\frac{n}{b}$
- riešenie všetkých podproblémov rekurzívne použitím rovnakej metódy
- kombinovanie v čase $c_2 n$ riešenia P z riešení všetkých podproblémov

Zobecnená rekurencia vyplývajúca z predchádzajúcej metódy „rozdeľuj a panuj“, $a \geq 1$, $b > 1$ konštanty, f funkcia:

(3.1)
$$\begin{aligned} &T(1) = \theta(1), \\ &T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n), n > 1 \end{aligned}$$

Lemma 1. *Nech $a \geq 1$, $b > 1$ sú konštanty, $f(n)$ nezáporná funkcia definovaná na mocninách b. Definujme $T(n)$ na mocninách b rekurenciou*

$$\begin{aligned} &T(1) = \theta(1), \\ &T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n), \ \textit{ak } n = b^i, i \in N, n > 1 \end{aligned}$$

Potom

$$T(n) = \theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right).$$

Dôkaz. Po úpravách

$$\begin{aligned} T(n) &= f(n) + aT\left(\frac{n}{b}\right) \\ &= f(n) + af\left(\frac{n}{b}\right) + a^2 T\left(\frac{n}{b^2}\right) \\ &= f(n) + af\left(\frac{n}{b}\right) + a^2 f\left(\frac{n}{b^2}\right) + \cdots + a^{\log_b n - 1} f\left(\frac{n}{b^{\log_b n - 1}}\right) + a^{\log_b n} T(1). \end{aligned}$$

Pretože $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$, posledný výraz je rovný:

$$a^{\log_b n} T(1) = \theta(n^{\log_b a}).$$

Po dosadení dostávame:

$$T(n) = \theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right).$$

♠

Hodnota $\theta(n^{\log_b a})$ odpovedá cene riešenie podproblémov (suma listov rekurzívneho stromu), hodnota $\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)$ odpovedá cene rozkladu (suma vnútorných vrcholov rekurzívneho stromu).

Lemma 2. *Nech $a \geq 1$, $b > 1$ sú konštanty, $f(n)$ nezáporná funkcia definovaná na mocninách b. Funkcia $g(n)$ definovaná na mocninách b vzťahom*

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)$$

môže byť ohraničená asymptoticky pre mocniny b nasledujúco:

1. Ak $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pre nejakú konštantu $\varepsilon > 0$, potom $g(n) = O(n^{\log_b a})$.

2. Ak $f(n) = \theta(n^{\log_b a})$, potom $g(n) = \theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$.

3. Ak $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ pre nejakú konštantu $c < 1$ a všetky $n \geq b$, potom $g(n) = \theta(f(n))$.

Dôkaz. 1. Ak $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, potom $f\left(\frac{n}{b^j}\right) = O\left(\left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a - \varepsilon}\right)$. Úpravami dostávame:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a - \varepsilon} &= n^{\log_b a - \varepsilon} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} \left(\frac{ab^\varepsilon}{b^{\log_b a}}\right)^j \\
&= n^{\log_b a - \varepsilon} \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} (b^\varepsilon)^j \\
&= n^{\log_b a - \varepsilon} \left(\frac{b^{\varepsilon \log_b n} - 1}{b^\varepsilon - 1}\right) \\
&= \left(\frac{n^\varepsilon - 1}{b^\varepsilon - 1}\right)
\end{aligned}$$

Pretože b a ε sú konštanty, môžme odhadnúť $n^{\log_b a - \varepsilon} O(n^\varepsilon) = O(n^{\log_b a})$, čím dostávame: $g(n) = O(n^{\log_b a})$.

2. Za predpokladu $f(n) = \theta(n^{\log_b a})$, dostávame: $f\left(\frac{n}{b^j}\right) = \theta\left(\left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a}\right)$. Úpravami dostávame:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a} &= n^{\log_b a} \sum_{j=0}^{\log_b n-1} \left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^j \\
&= n^{\log_b a} \sum_{j=0}^{\log_b n-1} 1 \\
&= n^{\log_b a} \log_b n.
\end{aligned}$$

Substitúciou do sumy dostávame:

$$g(n) = \theta(n^{\log_b a} \log_b n) = \theta(n^{\log_b a} \log_2 n).$$

3. Pretože $f(n)$ sa objavuje v definícii $g(n)$ a všetky členy $g(n)$ sú kladné, dostávame: $g(n) = \Omega(f(n))$ pre mocniny b. Z predpokladu: $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ pre nejaké $c < 1$ a všetky $n \geq b$ máme: $a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) \leq c^j f(n)$. Úpravami dostávame:

$$\begin{aligned}
g(n) &= a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\log_b n-1} c^j f(n) \\
&\leq f(n) \sum_{j=0}^{\infty} c^j \\
&= f(n) \left(\frac{1}{1-c}\right) \\
&= O(f(n))
\end{aligned}$$

Spojením oboch úvah dostávame: $g(n) = \theta(f(n))$ pre mocniny b.

♠

Lema 3. *Nech $a \geq 1$, $b > 1$ sú konštanty, $f(n)$ je nezáporná funkcia definovaná na mocninách b. Definujme $T(n)$ na mocninách b rekurenciou*

$$\begin{aligned}
T(n) &= \theta(1), \ \textit{ak } n = 1, \\
T(n) &= aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n), \ \textit{ak } n = b^i, \ i \in N.
\end{aligned}$$

Potom $T(n)$ môže byť ohraničené asymptoticky:

1. Ak $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ pre nejakú konštantu $\varepsilon > 0$, potom $T(n) = \theta(n^{\log_b a})$.

2. Ak $f(n) = \theta(n^{\log_b a})$, potom $T(n) = \theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$.

3. Ak $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ pre nejakú konštantu $\varepsilon > 0$, a ak $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ pre nejakú konštantu $c < 1$ a všetky dostatočne veľké n, potom $T(n) = \theta(f(n))$.

Dôkaz. 1. Z lemy 1 a 2 dostávame:

$$T(n) = \theta(n^{\log_b a}) + O(n^{\log_b a}) = \theta(n^{\log_b a}).$$

2. Z lemy 1 a 2 dostávame:

$$T(n) = \theta(n^{\log_b a}) + \theta(n^{\log_b a}\log_2 n) = \theta(n^{\log_b a}\log_2 n).$$

3. Podmienka $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ implikuje $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ (dokázať za DÚ), čím z lemy 1 a 2 dostávame:

$$T(n) = \theta(n^{\log_b a}) + \theta(f(n)) = \theta(f(n)).$$

♠

Master Theorem. *Nech $a \geq 1$, $b > 1$ sú konštanty, $f(n)$ funkcia a nech*

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n),$$

kde $\frac{n}{b}$ interpretujeme ako $\lceil \frac{n}{b} \rceil$ alebo $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$. Potom $T(n)$ môže byť ohraničené asymptoticky:
1. Ak $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$ pre nejakú konštantu $\varepsilon > 0$, potom $T(n) = \theta(n^{\log_b a})$.
2. Ak $f(n) = \theta(n^{\log_b a})$, potom $T(n) = \theta(n^{\log_b a}\log_2 n)$.
3. Ak $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$ pre nejakú konštantu $\varepsilon > 0$, a ak $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ pre nejakú konštantu $c < 1$ a všetky dostatočne veľké n, potom $T(n) = \theta(f(n))$.

Dôkaz. Dá sa dokázať na základe výsledkov Lemy 3 a odhadmi na celé časti čísel.

♠

Je dôležité si uvedomiť, že uvedené tri prípady nepokrývajú všetky možnosti pre $f(n)$. Existuje ‚diera'medzi prípadmi 1 a 2, keď $f(n)$ je menšie než $n^{\log_b a}$, ale nie polynomicky menšie. Podobná diera je aj medzi prípadmi 2 a 3, keď $f(n)$ je väčšie než $n^{\log_b a}$, ale nie polynomicky.

Pre spomínaný prípad mergesortu (za predpokladu $f(n) = n - 1$, $a = 2$, $b = 2$) dostávame odhad $\theta(n \log_2 n)$.

Príklad. Uvažujme prípad rekurencie $T(n) = 9T(n/3)+n$. Pre túto rekurenciu máme: $a = 9$, $b = 3$, $f(n) = n$ a teda $n^{\log_b a} = \theta(n^2)$. Teda $f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$, kde $\epsilon = 1$. Aplikovaním prvého prípadu Master Theoremu dostávame riešenie $T(n) = \theta(n^2)$.

Príklad. Uvažujme prípad rekurencie $T(n) = T(2n/3)+1$. Pre túto rekurenciu máme: $a = 1$, $b = 3/2$, $f(n) = 1$ a teda $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$. Pretože $f(n) = \theta(n^{\log_b a}) = \theta(1)$, aplikovaním prípadu 2 dostávame riešenie rekurencie $T(n) = \theta(\log_2 n)$.

Príklad. Master Theorem ale nemôže byť aplikovaný v prípade rekurencie: $T(n) = 2T(n/2) + n\log_2 n$. Platí $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = n\log_2 n$ a $n^{\log_b a} = n$. Vyzerá to na 3 prípad, ovšem nie je možné nájsť $\varepsilon > 0$ také, aby $n\log_2 n = \Omega(n^{1+\varepsilon})$. Rekurencia sa dá však napriek tomu spočítať podľa Lemy 1.

Literatúra

Cormen, Leiserson, Rivest: Introduction to Algorithms, 1990.

Súčty - úvod

Súčty sú v matematike všade, preto potrebujeme základné nástroje na manipuláciu s nimi. V tejto kapitole objasníme spôsoby zápisu a všeobecné metódy, ktoré nám spríjemnia narábanie so súčtami.

Označenie a zápis

V kapitole 1 sme sa stretli so súčtom prvých n celých čísel, ktorý sme zapísali $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$. Symboly „...“ nám naznačujú, ako doplniť v súčte chýbajúce členy podľa okolitých členov. Samozrejme, musíme dávať pozor na súčty tvaru $1 + 7 + \ldots + 41.7$, ktoré bez okolitého kontextu nedávajú zmysel. Na druhej strane, uvádzanie členov 3 a $(n-1)$ je trochu zbytočné, nakoľko predpis pre členy by bol dostatočne zrozumiteľný, aj keby sme napísali len$1 + 2 + \ldots + n$. Niekedy môžeme byť tak nedôslený, že napíšeme len $1 + \ldots + n$.

Budeme pracovať so súčtami všeobecného tvaru

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \tag{3.2}$$

kde každý člen a_k je nejako definované číslo. Tento zápis má tú výhodu, že vidíme celý súčet takmer, ako by sme ho mali celý vypísaný na papieri (samozrejme pri dostatku predstavivosti).

Každý výraz a_k v súčte nazývame **člen**. Členy súčtu sú obyčajne implicitne špecifikované výrazmi, čo umožňuje ľahšie pochopiť predpis na ich tvorbu. V takýchto prípadoch však musíme súčet zapísať v dostatočne rozšírenom tvare, aby význam členov bol dostatočne zrejmý. Napríklad

$$1 + 2 + \ldots + 2^{(n-1)}$$

zrejme označuje súčet n členov (a nie $2^{(n-1)}$ členov), čo môžeme priamočiarejšie zapísať

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{(n-1)}.$$

Zápis s troma bodkami má mnohoraké použitie, ale môže byť rozvláčny a dvojzmyselný. Naskýtajú sa ďalšie možnosti, najmä súčet s hranicami tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} a_k, \tag{3.3}$$

ktorý sa nazýva Sigma zápis, lebo používa grécke písmeno $\sum$ (veľká sigma). Tento zápis nám hovorí, že súčet zahŕňa presne tie členy a_k, ktorých index k je celé číslo medzi dolnou a hornou hranicou súčtu 1 a n vrátane. Hovoríme, že „sčitujeme cez k od 1 po n“. Prvýkrát použil $\sum$ zápis v roku 1820 Joseph Fourier a ten zakrátko zachvátil celý matematický svet.

Mimochodom, veličina nasledujúca za $\sum$ (teraz a_k) sa nazýva **sčítanec**.

Hovoríme, že indexová premenná k je zviazaná so znakom $\sum$), lebo premenná k vo výrazoch a_k nesúvisí s premennou k mimo $\sum$ zápisu. Písmeno k v zápise súčtu môžeme nahradiť ľubovolným iným písmenom bez zmeny významu výrazu. Často sa ako meno indexovej premennej používa písmeno i (snáď preto, že znamená „index“). My, vo všeobecnosti, budeme sčitovať podľa premennej k, nakoľko premenná i je vyhradená pre $\sqrt{-1}$.

Ukazuje sa, že všeobecné $\sum$ zápisy sú použiteľnejšie ako súčty s hranicami. Všeobecný $\sum$ zápis dostaneme tak, že napíšeme jednu alebo viac podmienok pod znak $\sum$ na vymedzenie množiny indexov, cez ktorú sčitujeme. Napríklad, súčet vo výrazoch (3.2) a (3.3) môžeme prepísať

$$\sum_{1\le k\le n} a_k. \tag{3.4}$$

V tomto konkrétnom príklade nie je veľa odlišností medzi novým tvarom súčtu a tvarom (3.3), ale všeobecný zápis nám umožňuje sčitovať cez množinu indexov, ktorá nemusí byť ohraničená na posebeidúce celé čísla. Napríklad, súčet štvorcov všetkých nepárnych kladných čísel menších ako 100 zapíšeme nasledovne:

$$\sum_{\substack{1\le k<100\\ k \text{ je nepárne}}} k^2,$$

čo je ekvivalentné zápisu

$$\sum_{k=0}^{49}(2k+1)^2,$$

ktorý je však ťažkopádnejší a menej jasný. Podobne súčet prevrátených hodnôt všetkých prvočísel medzi 1 a N je

$$\sum_{\substack{p\le N\\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p};$$

čo pomocou súčtu s hranicami zapíšeme

$$\sum_{k=1}^{\pi(N)} \frac{1}{p_k},$$

kde p_k označuje k-te prvočíslo a $\pi(N)$ je počet prvočísel $\le N$.

Najväčšou výhodou všeobecného $\sum$ zápisu je to, že sa s nim ľahšie manipuluje ako so súčtami s hranicami. Napríklad, predpokladajme, že chceme zmeniť indexovú premennú z k na $k+1$. Vo všeobecnom zápise túto zámenu zapíšeme

$$\sum_{1\le k\le n} a_k = \sum_{1\le k+1\le n} a_{k+1};$$

ľahko vidíme, čo sa stalo pri zámene premennej a substitúciu môžeme vykonať takmer bez rozmýšľania. Ale v tvare súčtu s hranicami dostávame

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1};$$

to už ťažšie vidieť, čo sa stalo a skôr spravíme chybu.

Na druhej strane, tvar súčtu s hranicami nie je celkom nepoužiteľný a zbytočný. Je pekný, úhľadný a rýchlejšie ho zapíšeme, lebo výraz (3.3) má sedem znakov v porovnaní s výrazom (3.4), ktorý má 8 znakov. Preto často pri formulácii problému a jeho riešenia používame $\sum$ zápis s hornou a dolnou hranicou, ale pri jeho riešení – pri manipuláciach so súčtom, pri ktorých transformujeme indexovú premennú – preferujeme prácu so všeobecným $\sum$ zápisom s podmienkami dole.

Znak $\sum$ budeme používať príliš často a tak by sme si mali byť istý, že vieme, čo znamená. Formálny zápis používame

$$\sum_{P(k)} a_k \tag{3.5}$$

ako skratku pre súčet všetkých členov a_k takých, že k je celé číslo majúce vlastnosť $P(k)$. („Vlastnosť" je ľubovoľné pravdivé či nepravdivé tvrdenie o k). Doteraz sme uvažovali, že existuje len konečne veľa celých čísel splňujúcich $P(k)$ takých, že $a_k \neq 0$; v opačnom prípade by sme sčitovali spolu nekonečne veľa nenulových čísel a situácia by bola trochu komplikovanejšia. Opačný krajný prípad je, ak vlastnosť $P(k)$ je nepravdivá pre všetky celé k. Vtedy dostávame „prázdny" súčet, ktorého hodnota je definovaná ako nula.

Často sa pokúšame písať

$$\sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)(n-k) \qquad \text{namiesto} \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)(n-k)$$

pretože členy pre $k = 0, 1$ a n sú v tomto súčte rovné nule. Môže sa zdať efektívnejšie sčitovať len $n-2$ členov namiesto $n+1$. Takéto snahy môžu byť na príťaž; lebo efektívnosť výpočtu nie je to isté, ako efektívnosť porozumenia! Je výhodné udržiavať hornú a dolnú hranicu v najjednoduchšom tvare, pretože narábanie so súčtami je tým jednoduchšie, čím jednoduchšie sú hranice. Navyše výraz $\sum_{k=2}^{n-1}$ je nebezpečný a zrádny, pretože nie je jasný jeho význam pre $n = 0$ alebo $n = 1$. Nulové členy nespôsobujú žiadne škodu, a často nás chránia pred mnohými problémami.

Doteraz diskutované označenia sú vcelku štandardné. Teraz urobíme radikálny odklon od tradične zaužívaných označení. Kenneth Iverson objavil prekrásnu myšlienku v jeho programovacom jazyku APL [161,strana 11], ktorá (ako uvidíme) veľmi zjednoduší mnohé veci, ktoré v tejto knihe chceme robiť. Myšlienka spočíva v tom, že do zátvoriek uzavrieme pravdivý či nepravdivý výraz a povieme, že jeho výsledkom je 1, ak je výraz pravdivý, alebo 0, ak je výraz nepravdivý.

Napríklad

$$(p \text{ je prvočíslo}) = \begin{cases} 1, & \text{ak } p \text{ je prvočíslo;} \\ 0, & \text{ak } p \text{ nie je prvočíslo.} \end{cases}$$

Iversonov spôsob umožňuje písať súčty bez akýchkoľvek obmedzení na index, pretože výraz (3.5) môžeme prepísať do tvaru

$$\sum_k a_k\bigl(P(k)\bigr). \tag{3.6}$$

Ak $P(k)$ je nepravdivé, člen a_k je rovný nule, takže ho môžeme bez obáv začleniť medzi sčitované členy. Tým sa ľahšie pracuje s indexom pri sčitovaní, pretože nemusíme robiť žiaden rozruch s ohraničujúcimi podmienkami.

Musíme poznamenať niektoré technické detaily: niekedy a_k nie je definované pre všetky celé k. Môžeme to obísť predpokladajúc, že $\bigl(P(k)\bigr)$ je „veľká nula“, ak $P(k)$ je nepravdivé; to je taká veľká nula, že výraz $a_k\bigl(P(k)\bigr)$ je rovný nule, aj keď a_k je nedefinované. Napríklad, použijúc Iversonov zápis môžeme zapísať súčet prevrátených hodnôt prvočísel $\leq N$ nasledovne

$$\sum_p (p \text{ je prvočíslo})(p \leq N)/p,$$

pričom nevzniká žiaden problém delenia nulou, ak $p = 0$, lebo podľa uvedenej dohody (0 je prvočíslo)$(0 \leq N)/0 = 0$.

Zhrňme, čo sme povedali o súčtoch. Existujú dva rozumné spôsoby ako vyjadriť súčet členov: jeden používa ‚...‘ a druhý ‚$\sum$‘. Zápis používajúci trojbodku je často praktickejší pri manipuláciach (zvlášť pri kombinácii susedných členov), nakoľko v ňom ľahšie objavíme trik potrebný na úpravu, ak máme celý súčet pred očami. Ale veľa detailov je tiež zavádzajúcich. Sigma zápis je jednoduchý, pôsobivý a priateľský a často vhodný pre manipuláciu, čo nie je také očividné u zápisu s troma bodkami. Ak pracujeme so Sigma zápisom, nulové členy nie sú nebezpečné. V skutočnosti, nuly nám často v Sigma operáciach pomáhajú.

Súčty a rekurentné vzťahy

Tak dobre, teraz už vieme, ako vyjadriť súčty v prijateľnom zápise. Ale ako človek skutočne postupuje pri hľadaní hodnoty súčtu? Jeden spôsob je, všimnúť si, že existuje blízky vzťah medzi súčtami a rekurentnými vzťahmi. Súčet

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

je ekvivalentný rekurzívnemu vzťahu

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0; \\ S_n &= S_{n-1} + a_n, \qquad \text{pre} > 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Preto súčet môžeme vypočítať použitím metódy, ktorú sme sa naučili v na riešenie rekurentných vzťahov.

Napríklad, ak a_n je rovné konštante plus násobok n, rekurentné vzťahy pre súčet typu (3.7) majú nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned} R_0 &= \alpha; \\ R_n &= R_{n-1} + \beta + \gamma n, \qquad \text{pre } n > 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Pokračujúc podobne ako pi rekurenciách zistíme, že $R_1 = \alpha + \beta + \gamma, R_2 = \alpha + 2\beta + 3\gamma$, a t.ď. Vo všeobecnosti riešenie môžeme zapísať v tvare

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma, \tag{3.9}$$

kde $A(n)$, $B(n)$ a $C(n)$ sú koeficienty závislosti na všeobecných parametroch α, β a γ.

Metóda z „našeho repertoáru" nám radí skúsiť dosadiť jednoduché funkcie do R_n dúfajúc, že nájdeme konštantné parametre α, β a γ, pre ktoré je riešenie zvlášť jednoduché. Položením $R_n = 1$ dostávame, že $\alpha = 1$, $\beta = 0$ a $\gamma = 0$. Z toho vyplýva

$$A(n) = 1.$$

Položením $R_n = n$ dostávame, že $\alpha = 0$, $\beta = 1$ a $\gamma = 0$. Z toho vyplýva

$$B(n) = n.$$

Položením $R_n = n^2$ dostávame, že $\alpha = 0$, $\beta = -1$ a $\gamma = 2$. Z toho vyplýva

$$2C(n) - B(n) = n^2$$

a dostávame $C(n) = (n^2 + n)/2$.

Preto, ak chceme vypočítať

$$\sum_{k=0}^{n} (a + bk),$$

rekurentné vzťahy (3.7) sa redukujú na (3.8), pričom $\alpha = \beta = a$, $\gamma = b$, a riešenie má tvar $aA(n) + aB(n) + bC(n) = a(n+1) + b(n+1)n/2$.

Opačne, mnohé rekurentné vzťahy môžeme redukovať na súčty, preto sa v tejto kapitole oboznámime so špeciálnymi metódami na výpočet súčtov, ktoré nám pomôžu riešiť rekurentné rovnice, ktoré by sme inak riešili obtiažne. Rekurentné vzťahy pre úlohu Hanojských veží sú toho príkladom:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0; \\ T_n &= 2T_{n-1} + 1, \qquad \text{pre } n > 0. \end{aligned}$$

Upravíme ich do špeciálneho tvaru podobného tvaru (3.7) tak, že vydelíme obe strany 2^n:

$$\frac{T_0}{2^0} = 0;$$
$$\frac{T_n}{2^n} = \frac{T_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}, \qquad \text{pre } n > 0.$$

Teraz položíme $S_n = \frac{T_n}{2^n}$ a dostávame

$$S_0 = 0;$$
$$S_n = S_{n-1} + 2^{-n}, \qquad \text{pre } n > 0.$$

Z toho vyplýva vzťah

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}.$$

(Poznamenajme, že sme zo súčtu vynechali člen pre $k = 0$). Súčet geometrickej rady $2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ odvodíme v tejto kapitole neskôr a ukážeme, že je $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Preto $T_n = 2^n S_n = 2^n - 1$.

V tomto odvodení sme previedli T_n na S_n tým, že sme rekurentné vzťahy vydelili číslom 2^n. Tento trik je špeciálny prípad metódy, ktorá môže redukovať skutočne ľubovoľný rekurentný vzťah tvaru

$$a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n \tag{3.10}$$

na súčet. Myšlienka spočíva na triku vynásobiť obe strany **sumarizačným členom**, s_n:

$$s_n a_n T_n = s_n b_n T_{n-1} + s_n c_n.$$

Tento člen je chytré zvoliť tak, aby

$$s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}.$$

Potom, ak označíme $S_n = s_n a_n T_n$, dostaneme rekurentný súčet,

$$S_n = S_{n-1} + s_n c_n.$$

Preto

$$S_n = s_0 a_0 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k \;=\; s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k,$$

a riešenie pôvodnej rekurentnej rovnice (3.10) je

$$T_n = \frac{1}{s_n a_n}\Big(s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\Big). \tag{3.11}$$

Napríklad, keď $n = 1$, dostaneme $T_1 = (s_1 b_1 T_0 + s_1 c_1)/s_1 a_1 = (b_1 T_0 + c_1)/a_1$.

Ale ako byť dostatočne chytrý pri hľadaní správneho s_n? To nie je problém! Vzťah $s_n = s_{n-1} a_{n-1}/b_n$ môžeme rozvinúť do zlomku,

$$s_n = \frac{a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1}{b_n b_{n-1} \dots b_2}, \tag{3.12}$$

ktorý sám alebo nejaký jeho násobok, je vhodný ako s_n. Napríklad v prípade rekurentných vzťahov pre Hanojské veže sú $a_n = 1$ a $b_n = 2$ a všeobecná metóda, ktorú sme práve odvodili, hovorí, že $s_n = 2^{-n}$ je vhodný násobok na násobenie rekurentnej rovnice, ak ju chceme redukovať na súčet. Na objavenie tohoto súčiniteľa nepotrebujeme skvelý záblesk inšpirácie.

Musíme byť však opatrní, aby sme sa nedopustili delenia nulou. Popísaná metóda funguje vždy, ak všetky koeficienty a a b sú nenulové.