Súčty

Súčty sú v matematike všade, preto potrebujeme základné nástroje na manipuláciu s nimi. V tejto kapitole objasníme spôsoby zápisu a všeobecné metódy, ktoré nám spríjemnia narábanie so súčtami.

Označenie a zápis

V kapitole 1 sme sa stretli so súčtom prvých n celých čísel, ktorý sme zapísali $1+2+3+\ldots+(n-1)+n$. Symboly „…“ nám naznačujú, ako doplniť v súčte chýbajúce členy podľa okolitých členov. Samozrejme, musíme dávať pozor na súčty tvaru $1+7+\ldots+41.7$, ktoré bez okolitého kontextu nedávajú zmysel. Na druhej strane, uvádzanie členov 3 a $(n-1)$ je trochu zbytočné, nakoľko predpis pre členy by bol dostatočne zrozumiteľný, aj keby sme napísali len$1+2+\ldots+n$. Niekedy môžeme byť tak nedôslený, že napíšeme len $1+\ldots+n$.

Budeme pracovať so súčtami všeobecného tvaru

$$a_1+a_2+\ldots+a_n, \tag{2.1}$$

kde každý člen a_k je nejako definované číslo. Tento zápis má tú výhodu, že vidíme celý súčet takmer, ako by sme ho mali celý vypísaný na papieri (samozrejme pri dostatku predstavivosti).

Každý výraz a_k v súčte nazývame **člen.** Členy súčtu sú obyčajne implicitne špecifikované výrazmi, čo umožňuje ľahšie pochopiť predpis na ich tvorbu. V takýchto prípadoch však musíme súčet zapísať v dostatočne rozšírenom tvare, aby význam členov bol dostatočne zrejmý. Napríklad

$$1+2+\ldots+2^{(n-1)}$$

zrejme označuje súčet n členov (a nie $2^{(n-1)}$ členov), čo môžeme priamočiarejšie zapísať

$$2^0+2^1+\ldots+2^{(n-1)}.$$

Zápis s troma bodkami má mnohoraké použitie, ale môže byť rozvláčny a dvojzmyselný. Naskýtajú sa ďalšie možnosti, najmä súčet s hranicami tvaru

$$\sum_{k=1}^{n} a_k, \tag{2.2}$$

ktorý sa nazýva Sigma zápis, lebo používa grécke písmeno $\sum$ (veľká sigma). Tento zápis nám hovorí, že súčet zahŕňa presne tie členy a_k, ktorých index k je celé číslo medzi dolnou a hornou hranicou súčtu 1 a n vrátane. Hovoríme, že „sčitujeme cez k od 1 po n“. Prvýkrát použil $\sum$ zápis v roku 1820 Joseph Fourier a ten zakrátko zachvátil celý matematický svet.

Mimochodom, veličina nasledujúca za $\sum$ (teraz a_k) sa nazýva **sčítanec.**

Hovoríme, že indexová premenná k je zviazaná so znakom $\sum$), lebo premenná k vo výrazoch a_k nesúvisí s premennou k mimo $\sum$ zápisu. Písmeno k v zápise súčtu môžeme nahradiť ľubovolným iným písmenom bez zmeny významu výrazu. Často sa ako meno indexovej premennej používa písmeno i (snáď preto, že znamená „index“). My, vo všeobecnosti, budeme sčitovať podľa premennej k, nakoľko premenná i je vyhradená pre $\sqrt{-1}$.

Ukazuje sa, že všeobecné $\sum$ zápisy sú použiteľnejšie ako súčty s hranicami. Všeobecný $\sum$ zápis dostaneme tak, že napíšeme jednu alebo viac podmienok pod znak $\sum$ na vymedzenie množiny indexov, cez ktorú sčitujeme. Napríklad, súčet vo výrazoch (2.1) a (2.2) môžeme prepísať

$$\sum_{1\le k\le n} a_k. \tag{2.3}$$

V tomto konkrétnom príklade nie je veľa odlišností medzi novým tvarom súčtu a tvarom (2.2), ale všeobecný zápis nám umožňuje sčitovať cez množinu indexov, ktorá nemusí byť ohraničená na posebeidúce celé čísla. Napríklad, súčet štvorcov všetkých nepárnych kladných čísel menších ako 100 zapíšeme nasledovne:

$$\sum_{\substack{1\le k<100\\ k \text{ je nepárne}}} k^2,$$

čo je ekvivalentné zápisu

$$\sum_{k=0}^{49}(2k+1)^2,$$

ktorý je však ťažkopádnejší a menej jasný. Podobne súčet prevrátených hodnôt všetkých prvočísel medzi 1 a N je

$$\sum_{\substack{p\le N\\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p};$$

čo pomocou súčtu s hranicami zapíšeme

$$\sum_{k=1}^{\pi(N)} \frac{1}{p_k},$$

kde p_k označuje k-te prvočíslo a $\pi(N)$ je počet prvočísel $\le N$.

Najväčšou výhodou všeobecného $\sum$ zápisu je to, že sa s nim ľahšie manipuluje ako so súčtami s hranicami. Napríklad, predpokladajme, že chceme zmeniť indexovú premennú z k na $k+1$. Vo všeobecnom zápise túto zámenu zapíšeme

$$\sum_{1\le k\le n} a_k = \sum_{1\le k+1\le n} a_{k+1};$$

ľahko vidíme, čo sa stalo pri zámene premennej a substitúciu môžeme vykonať takmer bez rozmýšľania. Ale v tvare súčtu s hranicami dostávame

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1};$$

to už ťažšie vidieť, čo sa stalo a skôr spravíme chybu.

Na druhej strane, tvar súčtu s hranicami nie je celkom nepoužiteľný a zbytočný. Je pekný, úhľadný a rýchlejšie ho zapíšeme, lebo výraz (2.2) má sedem znakov v porovnaní s výrazom (2.3), ktorý má 8 znakov. Preto často pri formulácii problému a jeho riešenia používame $\sum$ zápis s hornou a dolnou hranicou, ale pri jeho riešení – pri manipuláciach so súčtom, pri ktorých transformujeme indexovú premennú – preferujeme prácu so všeobecným $\sum$ zápisom s podmienkami dole.

Znak $\sum$ budeme používať príliš často a tak by sme si mali byť istý, že vieme, čo znamená. Formálny zápis používame

$$\sum_{P(k)} a_k$$

ako skratku pre súčet všetkých členov a_k takých, že k je celé číslo majúce vlastnosť $P(k)$. („Vlastnosť" je ľubovoľné pravdivé či nepravdivé tvrdenie o k). Doteraz sme uvažovali, že existuje len konečne veľa celých čísel splňujúcich $P(k)$ takých, že $a_k \ne 0$; v opačnom prípade by sme sčitovali spolu nekonečne veľa nenulových čísel a situácia by bola trochu komplikovanejšia. Opačný krajný prípad je, ak vlastnosť $P(k)$ je nepravdivá pre všetky celé k. Vtedy dostávame „prázdny" súčet, ktorého hodnota je definovaná ako nula.

Často sa pokúšame písať

$$\sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)(n-k) \qquad \text{namiesto} \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)(n-k)$$

pretože členy pre $k=0,1$ a n sú v tomto súčte rovné nule. Môže sa zdať efektívnejšie sčitovať len $n-2$ členov namiesto $n+1$. Takéto snahy môžu byť na príťaž; lebo efektívnosť výpočtu nie je to isté, ako efektívnosť porozumenia! Je výhodné udržiavať hornú a dolnú hranicu v najjednoduchšom tvare, pretože narábanie so súčtami je tým jednoduchšie, čím jednoduchšie sú hranice. Navyše výraz $\sum_{k=2}^{n-1}$ je nebezpečný a zrádny, pretože nie je jasný jeho význam pre $n=0$ alebo $n=1$. Nulové členy nespôsobujú žiadne škodu, a často nás chránia pred mnohými problémami.

Doteraz diskutované označenia sú vcelku štandardné. Teraz urobíme radikálny odklon od tradične zaužívaných označení. Kenneth Iverson objavil prekrásnu myšlienku v jeho programovacom jazyku APL [161,strana 11], ktorá (ako uvidíme) veľmi zjednoduší mnohé veci, ktoré v tejto knihe chceme robiť. Myšlienka spočíva v tom, že do zátvoriek uzavrieme pravdivý či nepravdivý výraz a povieme, že jeho výsledkom je 1, ak je výraz pravdivý, alebo 0, ak je výraz nepravdivý.

Napríklad

$$(p \text{ je prvočíslo}) = \begin{cases} 1, & \text{ak } p \text{ je prvočíslo;} \\ 0, & \text{ak } p \text{ nie je prvočíslo.} \end{cases}$$

Iversonov spôsob umožňuje písať súčty bez akýchkoľvek obmedzení na index, pretože výraz (2.4) môžeme prepísať do tvaru

$$\sum_k a_k \bigl(P(k)\bigr). \tag{2.5}$$

Ak $P(k)$ je nepravdivé, člen a_k je rovný nule, takže ho môžeme bez obáv začleniť medzi sčitované členy. Tým sa ľahšie pracuje s indexom pri sčitovaní, pretože nemusíme robiť žiaden rozruch s ohraničujúcimi podmienkami.

Musíme poznamenať niektoré technické detaily: niekedy a_k nie je definované pre všetky celé k. Môžeme to obísť predpokladajúc, že $\bigl(P(k)\bigr)$ je „veľká nula“, ak $P(k)$ je nepravdivé; to je taká veľká nula, že výraz $a_k\bigl(P(k)\bigr)$ je rovný nule, aj keď a_k je nedefinované. Napríklad, použijúc Iversonov zápis môžeme zapísať súčet prevrátených hodnôt prvočísel $\le N$ nasledovne

$$\sum_p (p \text{ je prvočíslo})(p \le N)/p,$$

pričom nevzniká žiaden problém delenia nulou, ak $p = 0$, lebo podľa uvedenej dohody (0 je prvočíslo $)(0 \le N)/0 = 0$.

Zhrňme, čo sme povedali o súčtoch. Existujú dva rozumné spôsoby ako vyjadriť súčet členov: jeden používa ‚...' a druhý ‚$\sum$'. Zápis používajúci trojbodku je často praktickejší pri manipuláciach (zvlášť pri kombinácii susedných členov), nakoľko v ňom ľahšie objavíme trik potrebný na úpravu, ak máme celý súčet pred očami. Ale veľa detailov je tiež zavádzajúcich. Sigma zápis je jednoduchý, pôsobivý a priateľský a často vhodný pre manipuláciu, čo nie je také očividné u zápisu s troma bodkami. Ak pracujeme so Sigma zápisom, nulové členy nie sú nebezpečné. V skutočnosti, nuly nám často v Sigma operáciach pomáhajú.

Súčty a rekurentné vzťahy

Tak dobre, teraz už vieme, ako vyjadriť súčty v prijateľnom zápise. Ale ako človek skutočne postupuje pri hľadaní hodnoty súčtu? Jeden spôsob je, všimnúť si, že existuje blízky vzťah medzi súčtami a rekurentnými vzťahmi. Súčet

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

je ekvivalentný rekurzívnemu vzťahu

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0; \\ S_n &= S_{n-1} + a_n, \qquad \text{pre} > 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Preto súčet môžeme vypočítať použitím metódy, ktorú sme sa naučili v na riešenie rekurentných vzťahov.

Napríklad, ak a_n je rovné konštante plus násobok n, rekurentné vzťahy pre súčet typu (2.6) majú nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned} R_0 &= \alpha; \\ R_n &= R_{n-1} + \beta + \gamma n, \qquad \text{pre } n > 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Pokračujúc podobne ako pi rekurenciách zistíme, že $R_1 = \alpha+\beta+\gamma, R_2 = \alpha+2\beta+3\gamma$, a t.ď. Vo všeobecnosti riešenie môžeme zapísať v tvare

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma, \tag{2.8}$$

kde $A(n)$, $B(n)$ a $C(n)$ sú koeficienty závislosti na všeobecných parametroch α, β a γ.

Metóda z „našeho repertoáru“ nám radí skúsiť dosadiť jednoduché funkcie do R_n dúfajúc, že nájdeme konštantné parametre α, β a γ, pre ktoré je riešenie zvlášť jednoduché. Položením $R_n = 1$ dostávame, že $\alpha = 1$, $\beta = 0$ a $\gamma = 0$. Z toho vyplýva

$$A(n) = 1.$$

Položením $R_n = n$ dostávame, že $\alpha = 0$, $\beta = 1$ a $\gamma = 0$. Z toho vyplýva

$$B(n) = n.$$

Položením $R_n = n^2$ dostávame, že $\alpha = 0$, $\beta = -1$ a $\gamma = 2$. Z toho vyplýva

$$2C(n) - B(n) = n^2$$

a dostávame $C(n) = (n^2 + n)/2$.

Preto, ak chceme vypočítať

$$\sum_{k=0}^{n}(a + bk),$$

rekurentné vzťahy (2.6) sa redukujú na (2.7), pričom $\alpha = \beta = a$, $\gamma = b$, a riešenie má tvar $aA(n) + aB(n) + bC(n) = a(n+1) + b(n+1)n/2$.

Opačne, mnohé rekurentné vzťahy môžeme redukovať na súčty, preto sa v tejto kapitole oboznámime so špeciálnymi metódami na výpočet súčtov, ktoré nám pomôžu riešiť rekurentné rovnice, ktoré by sme inak riešili obtiažne. Rekurentné vzťahy pre úlohu Hanojských veží sú toho príkladom:

$$\begin{aligned} T_0 &= 0; \\ T_n &= 2T_{n-1} + 1, \qquad \text{pre } n > 0. \end{aligned}$$

Upravíme ich do špeciálneho tvaru podobného tvaru (2.6) tak, že vydelíme obe strany 2^n:

$$\begin{aligned} \frac{T_0}{2^0} &= 0; \\ \frac{T_n}{2^n} &= \frac{T_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}, \qquad \text{pre } n > 0. \end{aligned}$$

Teraz položíme $S_n = \frac{T_n}{2^n}$ a dostávame

$$\begin{aligned} S_0 &= 0; \\ S_n &= S_{n-1} + 2^{-n}, \qquad \text{pre } n > 0. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva vzťah

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}.$$

(Poznamenajme, že sme zo súčtu vynechali člen pre $k = 0$). Súčet geometrickej rady $2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-n} = (\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^2 + \cdots + (\frac{1}{2})^n$ odvodíme v tejto kapitole neskôr a ukážeme, že je $1 - (\frac{1}{2})^n$. Preto $T_n = 2^n S_n = 2^n - 1$.

V tomto odvodení sme previedli T_n na S_n tým, že sme rekurentné vzťahy vydelili číslom 2^n. Tento trik je špeciálny prípad metódy, ktorá môže redukovať skutočne ľubovoľný rekurentný vzťah tvaru

$$a_n T_n = b_n T_{n-1} + c_n \tag{2.9}$$

na súčet. Myšlienka spočíva na triku vynásobiť obe strany **sumarizačným členom**, s_n:

$$s_n a_n T_n = s_n b_n T_{n-1} + s_n c_n.$$

Tento člen je chytré zvoliť tak, aby

$$s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}.$$

Potom, ak označíme $S_n = s_n a_n T_n$, dostaneme rekurentný súčet,

$$S_n = S_{n-1} + s_n c_n.$$

Preto

$$S_n = s_0 a_0 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k \;=\; s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k,$$

a riešenie pôvodnej rekurentnej rovnice (2.9) je

$$T_n = \frac{1}{s_n a_n}\Big(s_1 b_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k c_k\Big). \tag{2.10}$$

Napríklad, keď $n = 1$, dostaneme $T_1 = (s_1 b_1 T_0 + s_1 c_1)/s_1 a_1 = (b_1 T_0 + c_1)/a_1$.

Ale ako byť dostatočne chytrý pri hľadaní správneho s_n? To nie je problém! Vzťah $s_n = s_{n-1} a_{n-1}/b_n$ môžeme rozvinúť do zlomku,

$$s_n = \frac{a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1}{b_n b_{n-1} \ldots b_2}, \tag{2.11}$$

ktorý sám alebo nejaký jeho násobok, je vhodný ako s_n. Napríklad v prípade rekurentných vzťahov pre Hanojské veže sú $a_n = 1$ a $b_n = 2$ a všeobecná metóda, ktorú sme práve odvodili, hovorí, že $s_n = 2^{-n}$ je vhodný násobok na násobenie rekurentnej rovnice, ak ju chceme redukovať na súčet. Na objavenie tohoto súčiniteľa nepotrebujeme skvelý záblesk inšpirácie.

Musíme byť však opatrní, aby sme sa nedopustili delenia nulou. Popísaná metóda funguje vždy, ak všetky koeficienty a a b sú nenulové.

Príklad. Aplikujme tieto myšlienky na riešenie rekurentného vzťahu, ktorý vzniká pri skúmaní triedenia nazývaného „Quick-sort“; jedného z najrýchlejších vnútorných metód na triedenie dát. Priemerný počet porovnaní splňuje rekurentný vzťah

$$\begin{aligned} C_0 &= 0; \\ C_n &= n + 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k, \qquad \text{pre } n > 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Hmmm! To vyzerá oveľa strašidelnejšie ako rekurentné vzťahy, ktoré sme videli doteraz; výraz obsahuje súčet všetkých predchádzajúcich hodnôt a delenie číslom n. Skúšaním niektorých malých prípadov získame niektoré hodnoty ($C_1 = 2, C_2 = 5, C_3 = \frac{26}{3}$), ale nezbavíme sa našeho strachu.

Postupne redukujeme zložitosť (2.12), najprv odstránime delenie a potom odstránime znak $\sum$. Myšlienka vynásobiť obe strany n nás privedie k vzťahu

$$nC_n = n^2 + n + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_k, \qquad \text{pre } n > 0;$$

a ak n nahradíme výrazom $n-1$, dostaneme

$$(n-1)C_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1) + 2\sum_{k=0}^{n-2} C_k, \qquad \text{pre } n-1>0.$$

Teraz odčítame druhú rovnicu od prvej a znak $\sum$ sa stratí

$$nC_n - (n-1)C_{n-1} = 2n + 2C_{n-1}, \qquad \text{pre } n>1,$$

Z toho vyplýva, že tento vzťah platí aj pre $n=1$ pretože $C_1=2$. Tým sme pôvodný rekurentný vzťah pre C_n redukovali na oveľa jednoduchší

$$\begin{aligned} C_0 &= 0; \\ nC_n &= (n+1)C_{n-1} + 2n, \qquad \text{pre } n>0. \end{aligned}$$

To je úspech! Teraz sme v stave, keď môžeme použiť sumarizačný člen, nakoľko rekurentný vzťah má tvar (2.9) s $a_n=n$,$b_n=n+1$ a $c_n=2n$. Všeobecná metóda popísaná predtým nám hovorí, aby sme vynásobili rekurentný vzťah nejakým násobkom výrazu

$$s_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1}{b_nb_{n-1}\ldots b_2} = \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1}{(n+1)n\cdot\ldots\cdot 3} = \frac{2}{(n+1)n}.$$

Riešenie podľa (2.10) je

$$C_n = 2(n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}.$$

Súčet, ktorý sme dostali, je veľmi podobný tým, ktoré často vznikajú v aplikáciach. Oni vznikajú v skutočnosti tak často, že pre ne zavedieme špeciálne meno a špeciálny zápis:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \tag{2.13}$$

Písmeno H znamená „harmonické“; H_n je **harmonické číslo**. Nazýva sa tak preto, lebo k-ta harmonická tvorená huslovou strunou je základným tónom tvoreným strunou, ktorá je $1/k$ krát dlhšia.

Naše štúdium rekurentného vzťahu pre „Quick-sort“ (2.12) zavŕšime upravením C_n na výsledný tvar. To bude možné, ak vyjadríme C_n pomocou H_n. Súčet našej formuly pre C_n je

$$\sum_{k+1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k+1}.$$

Zámenou indexovej premennej k na $k-1$ a zmenou ohraničujúcich podmienok môžeme túto formulu dať do vzťahu s H_n:

$$\begin{aligned} \sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k+1} &= \sum_{1\le k-1\le n}\frac{1}{k} \\ &= \sum_{2\le k\le n+1}\frac{1}{k} \\ &= \Big(\sum_{1\le k\le n}\frac{1}{k}\Big) - \frac{1}{1} + \frac{1}{n+1} = H_n - \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

„Výborne“! Dostali sme súčet potrebný na dokončenie riešenia vzťahu (2.12): Priemerný počet porovnaní triedenia algoritmu „Quick-sortu“ na utriedenie n náhodne vybraných čísel je

$$C_n = 2(n+1)H_n - 2n. \tag{2.14}$$

A ako obvykle; skontrolujeme, či tento vzťah platí pre malé n $C_0 = 0, C_1 = 2, C_2 = 5$.

Práca so súčtami

Kľúčom k úspechu pri práci so súčtami je schopnosť zmeniť jednu $\sum$ na inú, ktorá je bližšie k nejakému cieľu. Ak si osvojíme niekoľko základných transformačných pravidiel a precvičíme ich použitie, pôjde nám to ľahko.

Nech K je nejaká konečná množina celých čísel. Súčty členov cez množinu indexov K môžeme transformovať použitím troch jednoduchých pravidiel:

- **distributívny zákon**
$$\sum_{k\in K} ca_k = c\sum_{k\in K} a_k;$$
- **asociatívny zákon**
$$\sum_{k\in K}(a_k+b_k) = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K} b_k;$$
- **komutatívny zákon**
$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{p(k)\in K} a_{p(k)}.$$

Distributívny zákon nám dovoľuje vsunúť a vyňať konštantu zo $\sum$. Asociatívny zákon dovoľuje rozdeliť súčet na dve časti a spájať viacero súčtov do jedného. Komutatívny zákon hovorí, že môžeme preusporiadať členy v ľubovoľnom poradí, kde $p(k)$ je ľubovoľná permutácia (Prečo sa teda tento zákon nevolá permutatívny zákon, ale komutatívny?) množiny všetkých celých čísel. Napríklad, ak $K = \{-1, 0, +1\}$ a $p(k) = -k$, tieto tri zákony hovoria, že

- **distributívny zákon**
$$ca_{-1} + ca_0 + ca_1 = c(a_{-1} + a_0 + a_1);$$
- **asociatívny zákon**
$$(a_{-1}+b_{-1}) + (a_0+b_0) + (a_1+b_1) = (a_{-1}+a_0+a_1) + (b_{-1}+b_0+b_1);$$
- **komutatívny zákon**
$$a_{-1} + a_0 + a_1 = a_1 + a_0 + a_{-1}.$$

Dôležité je uvedomiť si predpoklad, že funkcia $p(k)$ vo všeobecnom komutatívnom zákone je permutáciou všetkých celých čísel. Inými slovami, pre každé celé číslo n existuje práve jedno celé číslo k také, že $p(k) = n$. V opačnom prípade komutatívny zákon nemusí platiť. Transformácie typu $p(k) = k + c$ alebo $p(k) = c - k$, kde c je celočíselná konštanta, sú vždy permutáciami, preto vždy fungujú.

Na príklade uvedieme dôležité pravidlo na *kombináciu rôznych množín indexov:* ak K a K' sú ľubovoľné množiny celých čísel, potom

$$\sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K'} a_k = \sum_{k\in K\cap K'} a_k + \sum_{k\in K\cup K'} a_k. \tag{2.20}$$

Nasledujúce vzťahy vyplývajú zo všeobecnej formule

$$(k\in K) + (k\in K') = (k\in K\cap K') + (k\in K\cup K'). \tag{2.22}$$

Podobne použijeme pravidlo (2.22) na kombináciu dvoch takmer disjunktých indexových množín

$$\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \text{pre } 1\le m\le n;$$

alebo na vyňatie jedného člena zo súčtu

$$\sum_{0\le k\le n} a_k = a_0 + \sum_{1\le k\le n} a_k, \qquad \text{pre } n \ge 0. \tag{2.23}$$

Táto operácia vyňatia jedného člena je základom **perturbačnej metódy**, ktorá nám často pomôže pri výpočte hodnoty súčtu v explicitnom tvare. Myšlienka spočíva v tom, že najprv si neznámy súčet označíme S_n:

$$S_n = \sum_{0\le k\le n} a_k.$$

(pomenuj a zvíťaz), a potom dvomi spôsobmi prepíšeme S_{n+1}; vyňatím najprv prvého, a potom posledného člena:

$$\begin{aligned} S_n + a_{n+1} &= \sum_{0\le k\le n+1} a_k = a_0 + \sum_{1\le k\le n+1} a_k \\ &= a_0 + \sum_{1\le k+1\le n+1} a_{k+1} \\ &= a_0 + \sum_{0\le k\le n} a_{k+1}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Teraz sa pokúsme poslený súčet vyjadriť pomocou S_n. Ak sa nám to podarí, získame rovnicu, ktorej riešením je hľadaný súčet.

Ako príklad, použijeme túto metódu na nájdenie súčtu všeobecnej **geometrickej postupnosti**,

$$S_n = \sum_{0\le k\le n} ax^k.$$

Všeobecná perturbačná schéma vo vzťahu (2.24) nám radí

$$S_n + ax^{n+1} = ax^0 + \sum_{0\le k\le n} ax^{k+1},$$

a súčet na pravej strane je podľa distributívneho zákona rovný $\sum_{0\le k\le n} ax^k = xS_n$. Preto $S_n + ax^{n+1} = a + xS_n$ a hľadané riešenie pre S_n má tvar

$$\sum_{k=0}^{n} ax^k = \frac{a - ax^{n+1}}{1-x}, \qquad \text{pre } x \ne 1. \tag{2.25}$$

(Aháää, túto formulu sme drilovali na strednej škole!!!) (Keď $x = 1$, súčet sa samozrejme zjednoduší na $a(n+1)$). Pravá strana pripomína výraz, ktorý vznikne tým, že od prvého člena odčítame posledný člen (resp. člen nasledujúci za posledným) a vydelíme výrazom 1 mínus kvocient.

Príklad. Toto bolo tiež ľahké. Skúsme metódu perturbácie na zložitejšom príklade súčtu,

$$S_n = \sum_{0\le k\le n} k2^k.$$

V tomto prípade platí $S_0 = 0, S_1 = 2, S_2 = 10, S_3 = 34, S_4 = 98$. Ale ako vyzerá všeobecný vzťah? Podľa vzťahu (2.24) dostávame, že

$$S_n + (n+1)2^{n+1} = \sum_{0\le k\le n} (k+1)2^{k+1};$$

a chceme vyjadriť pravú stranu súčtu pomocou S_n. Môžeme ju rozdeliť pomocou asociatívneho zákona na dva súčty,

$$\sum_{0\le k\le n} k2^{k+1} + \sum_{0\le k\le n} 2^{k+1},$$

Prvý z uvedených súčtov je rovný $2S_n$. Druhý súčet je geometrická rada, ktorej súčet sa podľa vzťahu (2.25) rovná $(2-2^{n+2})/(1-2) = 2a^{n+2} - 2$. Odtiaľ $S_n + (n+1)x^{n+1} = xS_n + (x - x^{n+2})/(1-x)$, a algebraickými úpravami dostaneme

$$\sum_{0\le k\le n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Teraz už rozumieme, prečo $S_3 = 34$: 34 je teda $32+2$ a nie $2 \cdot 17$.

Podobné odvodenie so základom x namiesto 2 nám dá rovnicu $S_n+(n+1)x^{n+1} = xS_n+(x-x^{n+2})/(1-x)$; z čoho môžeme odvodiť vzťah

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}, \qquad \text{pre } x \ne 1 \tag{2.26}$$

Je zaujímavé si všimnúť, že sme tento explicitný vzťah mohli odvodiť úplne iným spôsobom pomocou elementárnych metód diferenciálneho počtu. Ak uvažujeme rovnicu

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

a zderivujeme obe jej strany vzhľadom na x dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} &= \frac{(1-x)(-(n+1)x^n)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}\\ &= \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2},\end{aligned}$$

pretože derivácia súčtu je súčet derivácii jej členov. V ďalších prednáškach si všimneme mnohých ďalších vzťahov medzi matematickou analýzou a diskrétnou matematikou.

Viacnásobné súčty

Členy v súčte môžu byť určené dvomi alebo viacerými indexami, nie len jedným. Napríklad, výraz

$$\begin{aligned}\sum_{1\le j,k\le 3} a_jb_k = {} & a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3\\ & a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3\\ & a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3.\end{aligned}$$

predstavuje dvojitý súčet deviatich členov určených dvomi indexami j a k. Pre takéto súčty použijeme rovnaký zápis a metódy, ako sme používali pre jednoduché indexy.

Môžme tiež použiť dva znaky $\sum$, a vtedy hovoríme o súčte súčtov. Napríklad, zápis

$$\sum_{P(j,k)} a_{j,k} = \sum_{j,k} a_{j,k}(P(j,k))$$

je skráteným zápisom pre

$$\sum_j \sum_k a_{j,k}(P(j,k)) = \sum_j \left(\sum_k a_{j,k}(P(j,k)) \right).$$

(Viacnásobné $\sum$y sa vyhodnocujú zprava doľava (zvnútra von).) čo je súčet cez všetky celé j z výrazov $\sum_k a_{j,k}(P(j,k))$, t.j. z členov $a_{j,k}$ cez všetky celé k, pre ktoré je $P(j,k)$ pravdivé. V takýchto prípadoch hovoríme, že sčitujeme najprv podľa k a potom podľa j. Viacnásobný súčet viacerých indexov môžeme sčitovať v ľubovoľnom poradí indexov.

Vďaka tomu dostávame základný zákon pre viacnásobné súčty, nazývaný tiež **zákon zámeny poradia sčitovania**, ktorý zovšeobecňuje asociatívny zákon (2.16) uvedený skôr:

$$\sum_j \sum_k a_{j,k}(P(j,k)) = \sum_{P(j,k)} a_{j,k} \;=\; \sum_k \sum_j a_{j,k}(P(j,k)). \tag{2.27}$$

Stredný výraz v tomto zákone je súčet cez dva indexy k a j. Ľavý súčet $\sum_j \sum_k$ je súčet najprv podľa k, a potom podľa j. Pravý súčet $\sum_k \sum_j$ je súčet najprv podľa j, a potom podľa k. V praxi, ak chceme vypočítať dvojitý súčet, často je ľahšie sčitovať najprv podľa prvého indexu a potom podľa druhého. Poradie indexov si zvolíme podľa toho, ktoré je výhodnejšie.

Súčet súčtov nie je dôvod pre paniku, ale u začiatočníkov môže vyvolať zmätok. Urobíme preto viaceré príklady. Náš príklad s deväťčlenným súčetom poskytuje dobrú ilustráciu pre manipuláciu s dvojitými súčtami, pretože takýto súčet môže byť naozaj zjednodušený a proces zjednodušovania je typický pre prácu s viacnásobnými súčtami:

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le j,k\le 3} a_j b_k &= \sum_{j,k} a_j b_k (1 \le j,k \le 3) \;=\; \sum_{j,k} a_j b_k (1 \le j \le 3)(1 \le k \le 3)\\
&= \sum_j \sum_k a_j b_k (1 \le j \le 3)(1 \le k \le 3)\\
&= \sum_j a_j (1 \le j \le 3) \sum_k b_k (1 \le k \le 3)\\
&= \sum_j a_j (1 \le j \le 3) \Big(\sum_k b_k (1 \le k \le 3)\Big)\\
&= \Big(\sum_j a_j (1 \le j \le 3)\Big)\Big(\sum_k b_k (1 \le k \le 3)\Big)\\
&= \Big(\sum_{j=1}^{3} a_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{3} b_k\Big).
\end{aligned}$$

Prvý riadok označuje súčet deviatich členov bez určeného poradia. Druhý riadok ich zoskupuje do trojíc. Tretí riadok využíva distributívny zákon na vyňatie všetkých členov a, nakoľko a_j nezávisí na k; tým dostávame $a_1(b_1+b_2+b_3)+a_2(b_1+b_2+b_3)+a_3(b_1+b_2+b_3)$. Štvrtý riadok je rovnaký ako tretí, len obsahuje zbytočný pár zátvoriek, takže piaty riadok nevyzerá až tak strašne. V piatom riadku sme vyňali člen $(b_1+b_2+b_3)$, ktorý sa vyskytuje v každom člene pre každé j: $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3)$. Posledný riadok je inak zapísaný predposledný riadok. Túto metódu odvodenia môžeme použiť pri odvodení **všeobecného distributívneho zákona**,

$$\sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_j b_k \;=\; \Big(\sum_{j\in J} a_j\Big)\Big(\sum_{k\in K} b_k\Big), \tag{2.28}$$

ktorý platí pre ľubovoľné množiny indexov J a K.

Základné pravidlo (2.27) na zámenu poradia sumácie má veľa obmien, ktoré vzniknú, keď nejakým spôsobom ohraničíme indexové množiny (miesto sumácie cez všetky celočíselné j a k). Existujú dve možnosti, ako presne formalizovať toto pravidlo: prvý spôsob má príchuť vanilky a druhý tŕnistej cesty. Najprv, vanilková varianta:

$$\sum_{j\in J} \sum_{k\in K} a_{j,k} \;=\; \sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_j b_k \;=\; \sum_{k\in K} \sum_{j\in J} a_{j,k}. \tag{2.29}$$

To sme len inak zapísali vzťah (2.27). Táto vanilková varianta zákona sa používa, keď obory hodnôt pre indexy sú navzájom nezávislé.

Vzťah pre variantu tŕnistej cesty je trochu záľudnejší. Používa sa vtedy, keď obor hodnôt pre vnútorný index závisí na hodnote indexovej premennej vonkajšieho súčtu:

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K(j)} a_{j,k} \;=\; \sum_{k\in K'}\sum_{j\in J'(k)} a_{j,k}. \tag{2.30}$$

J,$K(j)$,K' a $J'(k)$ sú množiny spĺňajúce vzťah

$$(j\in J)(k\in K(j) \;=\; (k\in K')(j\in J'(k))$$

Podobná faktorizácia je v princípe vždy možná, pretože môžeme položiť $J = K'$ rovné množine všetkých celých čísel a $K(j) = J'(k)$ tak, aby vyjadrovalo základnú vlastnosť $P(j,k)$, ktorá riadi dvojitý súčet. Ale existujú špeciálne prípady, kedy množiny J,$K(j)$,K' a $J'(k)$ majú jednoduchý tvar. Tieto prípady často vznikajú v aplikáciach. Ako príklad uvedieme zvlášť užitočnú faktorizáciu:

$$(1\le j\le n)(j\le k\le n) \;=\; (1\le j\le k\le n) \;=\; (1\le k\le n)(1\le j\le k). \tag{2.31}$$

Zvyčajne jeden z týchto súčtov je ľahšie vypočítateľný ako druhý. Vzťah (2.31) môžeme použiť aj na transformáciu ťažšieho tvaru na ľahší.

Príklad. Aplikujme tieto myšlienky na užitočnom príklade. Uvažujme maticu

$$\begin{pmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & \dots & a_1a_n\\ a_2a_1 & a_2a_2 & a_2a_3 & \dots & a_2a_n\\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3a_3 & \dots & a_3a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \dots & a_na_n \end{pmatrix}$$

obsahujúcu n^2 súčinov a_ja_k. Našim cieľom je nájsť jednoduchý vzťah pre súčet všetkých členov nad, alebo pod hlavnou uhlopriečkou v tejto matici:

$$S_{HT} = \sum_{1\le j\le k\le n} a_ja_k,$$

Nakoľko $a_ja_k = a_ka_j$ matica je symetrická podľa hlavnej uhlopriečky, preto aj súčet S_{HT} je približne rovný polovici zo súčtu všetkých prvkov (okrem prvkov hlavnej uhlopriečky).

Podobné úvahy motivujú nasledujúce úpravy, v ktorých sme premenili (j,k) na (k,j).

$$S_{HT} \;=\; \sum_{1\le j\le k\le n} a_ja_k \;=\; \sum_{1\le k\le j\le n} a_ka_j \;=\; \sum_{1\le k\le j\le n} a_ja_k \;=\; S_{DT},$$

Pretože platí

$$(1\le j\le k\le n)+(1\le k\le j\le n) \;=\; (1\le j,k\le n)+(1\le j=k\le n),$$

dostávame

$$2S_{HT} \;=\; S_{HT}+s_{DT} \;=\; \sum_{1\le j,k\le n} a_ja_k \;=\; \sum_{1\le j=k\le n} a_ja_k.$$

Prvý súčet je po úprave pomocou všeobecného distributívneho zákona (2.28) rovný $(\sum_{j=1}^n a_j)(\sum_{k=1}^n a_k) = (\sum_{k=1}^n a_k)^2$. Druhý súčet je rovný $\sum_{k=1}^n a_k^2$. Takže dostávame výraz pre súčet členov matice, ktoré sa nachádzajú v hornom trojuholníku:

$$S_{HT} \;=\; \sum_{1\le j\le k\le n} a_ja_k \;=\; \frac{1}{2}\left(\Bigl(\sum_{k=1}^n a_k\Bigr)^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2\right). \tag{2.33}$$

Príklad. Posmelený úspechom si všimnime iný dvojitý súčet:

$$S \;=\; \sum_{1\le j<k\le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j).$$

Zámenou k za j opäť dostaneme symetrický vzťah:

$$S \;=\; \sum_{1\le k<j\le n} (a_j - a_k)(b_j - b_k) \;=\; \sum_{1\le k<j\le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j).$$

Takže môžeme obe rovnosti pre S sčítať a použijúc vzťah

$$(1 \le j \le k \le n) + (1 \le k < j \le n) \;=\; (1 \le j,k \le n) - (1 \le j = k \le n),$$

dostaneme

$$2S \;=\; \sum_{1\le j,k\le n} (a_j - a_k)(b_j - b_k) - \sum_{1\le k=j\le n} (a_j - a_k)(b_j - b_k).$$

Druhý súčet je rovný nule; a čo prvý? Ten sa rozpadne na štyri oddelené súčty, každý s vanilkovou príchuťou:

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le j,k\le n} a_j b_j - \sum_{1\le j,k\le n} a_j b_k - \sum_{1\le j,k\le n} a_k b_j + \sum_{1\le j,k\le n} a_k b_k \\
&= 2 \sum_{1\le j,k\le n} a_k b_k - \sum_{1\le j,k\le n} a_j b_k \\
&= 2n \sum_{1\le k\le n} a_k b_k - 2\Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k\Bigr)\Bigl(\sum_{k=1}^{n} b_k\Bigr).
\end{aligned}$$

V poslednom kroku kroku sme oba súčty zjednodušili podľa všeobecného distributívneho zákona (2.28). Ak sa úpravy prvého súčtu zdajú hrôzostrašné, zopakujeme ich pomaly:

$$\begin{aligned}
2 \sum_{1\le j,k\le n} a_k b_k &= 2 \sum_{1\le k\le n} \sum_{1\le j\le n} a_k b_k \\
&= 2 \sum_{1\le k\le n} a_k b_k \sum_{1\le j\le n} 1 \\
&= 2 \sum_{1\le k\le n} a_k b_k n = 2n \sum_{1\le k\le n} a_k b_k.
\end{aligned}$$

Indexová premenná, ktorá sa nevyskytuje v sčítancoch môže byť jednoducho vypustená, ak vynásobíme zvyšok veľkosťou množiny obory daného indexu (v našom prípade n).

Vrátime sa tak, kde sme naše úvahy prerušili; náš vzťah môžeme vydeliť dvomi a preusporiadť tak, že dostaneme zaujímavý vzťah

$$\Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k\Bigr)\Bigl(\sum_{k=1}^{n} b_k\Bigr) = n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{1\le j<k\le n} (a_k - a_j)(b_k - b_j). \tag{2.34}$$

Z tejto identity ako špeciálny prípad vyplýva **Čebyševova nerovnosť pre súčty**:

$$\begin{aligned}
\Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k\Bigr)\Bigl(\sum_{k=1}^{n} b_k\Bigr) &\le n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, &\quad &\text{ak } a_1 \le \cdots \le a_n \text{ a } b_1 \le \cdots \le b_n; \\
\Bigl(\sum_{k=1}^{n} a_k\Bigr)\Bigl(\sum_{k=1}^{n} b_k\Bigr) &\ge n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, &\quad &\text{ak } a_1 \le \cdots \le a_n \text{ a } b_1 \ge \cdots \ge b_n.
\end{aligned}$$

Literatúra

Uvedená kapitola je voľným prekladom prvej časti 2.kapitoly knihy R. Grahama, D. E. Knutha a O. Patashnika: *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989. Ďakujem svojmu kolegovi M. Winczerovi, ktorý mi poskytol zdrojový súbor prekladu a tým mi ušetril drahocenný čas.