Všeobecné metody na počítanie súm

Teraz si na jednoduchom príklade precvičíme z rôznych strán poznatky, ktoré sme sa naučili. Na niekoľkých nasledujúcich stranách sa pokúsime nájsť explicitné vyjadrenie pre súčet štvorcov prvých n celých čísel, ktorý označíme $\Box_n$:

$$\Box_n = \sum_{0 \le k \le n} k^2, \qquad \text{pre } n \ge 0 \tag{2.37}$$

Ukážeme, že existuje aspoň sedem rôznych spôsobov, ako riešiť tento problém a postupne sa budeme učiť užitočné stratégie na „útočenie proti súčtom“ vo všeobecnosti.

Najprv, ako obyčajne, si všimnime riešenia pre niekoľko malých prípadov:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$\Box_n$	0	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	605

Z uvedených príkladov nie je bezprostredne jasné, ako vyzerá explicitný vzťah. Avšak, ak ho nájdeme, môžeme ho podľa týchto hodnôt skontrolovať.

Metóda 0: Nájdi to v tabuľkách

Úloha nájdenia súčtu prvých n štvorcov už pravepodobne bola vyriešená, takže najpríjemnejšie je nájsť riešenie vo vreckovej príručke. Istotne nám dobre poslúži *CRC Standard Mathematical Tables*, ktorá na strane 72 uvádza riešenie našej úlohy:

$$\Box_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \text{pre } n \ge 0 \tag{2.38}$$

Na presvedčenie, že sme sa nepomýlili, skontrolujeme tento vzťah pre $\Box_5 = 5 \cdot 6 \cdot 11/6 = 55$. Okrem iného, strana 72 v týchto tabuľkách poskytuje ďalšie informácie o súčtoch tretích, štvrtých, ... až detiatych mocnín.

Je dobré si osvojiť základné zdroje informácií, lebo môžu byť veľmi užitočné a nápomocné. Ale Metóda 0 nie je celkom konzistentná s naším duchom, lebo chceme vedieť, ako sami môžeme prísť na riešenie. Táto vyhľadávacia metóda je ohraničená na problémy, o ktorých sa rozhodli iní ľudia, že sú ťažko riešiteľné. Iné problémy tam nemusia byť.

Metóda 1: Navrhni riešenie a dokáž ho indukciou.

Snáď nám malý vtáčik povie riešenie problému, alebo prídeme na explicitný vzťah nejakou menej presnou myšlienkou. Potom musíme dokázať, že riešenie je správne.

Napríklad, môžeme si povšimnúť, že hodnoty $\Box_n$ majú málo prvočíselných deliteľov ... Taktiež môžeme mať podozrenie na ekvivalentú formulu

$$\Box_n = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}, \qquad \text{pre } n \ge 0 \tag{2.39}$$

ktorá je krajšia a ľahšie zapamätateľná.

Tak sa na to pozrime! Vieme, že $\Box_0 = 0 = 0(0 + \frac{1}{2})(0 + 1)/3$, takže základ indukcie je ľahký. Predpodkladajme, že $n > 0$ a (2.39) platí, keď n nahradíme $n - 1$. Nakoľko

$$\Box_n = \Box_{n-1} + n^2,$$

dostávame

$$\begin{aligned}
3\Box_n &= (n-1)\left(n - \frac{1}{2}\right)n + 3n^2 \\
&= \left(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}\right) + 3n^2 \\
&= \left(n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}\right) \\
&= n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n+1).
\end{aligned}$$

Preto vzťah (2.39) skutočne platí pre všetky $n \geq 0$.

Indukcia má svôj význam, ale je akosi viac obranná metóda, ako progresívna metóda hľadania riešenia, Ale toto ešte nie je to, čo sme v skutočnosti hľadali. Všetky ostatné súčty, ktoré sme doteraz v tejto kapitole vypočítali, boli získané bez indukcie. Preto tiež podobne chceme určiť súčet typu $\Box_n$. Záblesky inšpirácia nie sú nevyhnutné. Mali by sme byť schopní sčitovať súčty aj v menej tvorivých dňoch.

Metóda 2: Perturbácia súčtu

Vráťme sa k metóde perturbácie, ktorá tak dobre fungovala pre geometrickú radu (2.25). Vyjmeme prvý a posledný člen z $\Box_{n+1}$ a dostaneme rovnosť pre $\Box_n$.

$$\begin{aligned}
\Box_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \leq k \leq n} (k+1)^2 &= \sum_{0 \leq k \leq n} (k^2 + 2k + 1) \\
&= \sum_{0 \leq k \leq n} k^2 + 2 \sum_{0 \leq k \leq n} k + \sum_{0 \leq k \leq n} 1 \\
&= \Box_n + 2 \sum_{0 \leq k \leq n} k + (n+1).
\end{aligned}$$

Hop-la! Členy $\Box_n$ sa navzájom vyrušia. Niekedy, napriek našemu veľkému nadšeniu, perturbačná metóda dáva vzťah typu $\Box_n = \Box_n$.

Na druhej strane, odvodenie nie je úplne zbytočné, poradí nám, ako sčítať súčet prvých n celých čísel a aký je explicitný vzťah pre tento súčet:

$$2 \sum_{0 \leq k \leq n} k = (n+1)^2 - (n+1),$$

aj keď sme dúfali, že objavíme súčet štvorcov prvých n celých čísel. Možno, ak by sme začali so súčtom tretích mocnín celých čísel, ktorý môžeme označiť $\blacksquare_n$, dostali by sme výraz pre súčet štvorcov celých čísel? Skúsme to.

$$\begin{aligned}\blacksquare_n + (n+1)^3 = \sum_{0\le k\le n}(k+1)^3 &= \sum_{0\le k\le n}(k^3+3k^2+3k+1)\\ &= \blacksquare_n + 3\square_n + 3\frac{(n+1)n}{2} + (n+1).\end{aligned}$$

Členy $\blacksquare_n$ sa vykrátia a dostávame vzťah pre $\square_n$ bez spoliehania sa na matematickú indukciu:

$$\begin{aligned}3\square_n &= (n+1)^3 - 3(n+1)\frac{n}{2} - (n+1)\\ &= (n+1)(n^2+2n+1-\frac{3}{2}n-1) = (n+1)(n+\frac{1}{2})n.\end{aligned}$$

Metóda 3: Prevod sumy na rekurenciu (možno i obecnejšiu)

Mierne zovšeobecnený rekurentný vzťah (2.7) taktiež postačí na sčítanie členov typu n^2. Riešenie rekurentnej rovnice

$$\begin{aligned}R_0 &= \alpha,\\ R_n &= R_{n-1} + \beta + \gamma n + \delta n^2, \qquad \text{pre } n>0\end{aligned} \tag{2.40}$$

bude všeobecného tvaru

$$R_n = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma + D(n)\delta; \tag{2.41}$$

a už sme určili $A(n)$,$B(n)$ a $C(n)$, pretože (2.41) je rovnaký ako vzťah (2.7), keď $\delta = 0$. Ak teraz položíme $R_n = n^3$, zistíme, že n^3 je riešením pre $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -3$, $\delta = 3$. Preto vzťah

$$3D(n) - 3C(n) + B(n) = n^3;$$

určuje $D(n)$.

Zaujímali sme sa o súčet $\square_n$, ktorý sa rovná $\square_{n-1}+n^2$, preto sme dostali $\square_n = R_n$, keď sme položili $\alpha=\beta=\gamma=0$ a $\delta=1$ vo vzťahu (2.41). Odtiaľ $\square_n = D(n)$. Nepotrebujeme algebraické úpravy na výpočet $D(n)$ z $B(n)$ a $C(n)$, pretože už vieme, aký bude výsledok. Ale pochybovači medzi nami by sa mali uistiť úpravou

$$3D(n) = n^3 + 3C(n) - B(n) = n^3 + 3\frac{(n+1)n}{2} - n = n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1).$$

Metóda 4: Zámena súčtu integrálom.

Ľudia, ktorým je miesto diskrétnej matematiky bližšia matematická analýza, sú bližšie $\int$ miesto $\sum$, takže prirodzene hľadajú možnosť ako nahradiť $\sum$ za $\int$. Ukážeme si, že to nie je až taký zlý nápad. Ale zatiaľ, dobrá myšlienka je vysvetliť vzťah medzi $\sum$ a $\int$, nakoľko sčitovanie a integrovanie sú založené na veľmi podobných myšlienkách.

V matematickej analýze integrál znázorňujeme ako plochu pod krivkou. Túto plochu môžeme aproximovať pokrytím dlhými a tenkými obdĺžnikmi, ktoré sa dotýkajú krivky. Nakoľko $\square_n$ je súčet plôch obdĺžnikov, ktorých rozmery sú 1×1, 1×4, ..., $1 \times n^2$, je približne rovný ploche pod krivkou $f(x) = x^2$ medzi 0 a n.

Plocha pod krivkou je $\int_0^n x^2 = n^3/3$, preto vieme, že $\square_n$ je približne rovné $\frac{1}{3}n^3$.

Jeden spôsob, ako použiť tento vzťah je určiť chybu $E_n = \square_n - \frac{1}{3}n^3$ v aproximácii súčtu integrálom. Nakoľko E_n splňuje rekurentný vzťah $\square_n = \square_{n-1} + n^2$, zistíme, že E_n splňuje jednoduchší rekurentný vzťah

$$\begin{aligned} E_n = \square_n - \frac{1}{3}n^3 = \square_{n-1} + n^2 - \frac{1}{3}n^3 &= E_{n-1} + \frac{1}{3}(n-1)^3 + n^2 - \frac{1}{3}n^3 \\ &= E_{n-1} + n - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Iný spôsob sledovania integrálneho prístupu je nájsť formulu E_n sčitovaním plôch.

$$\square_n - \int_0^n x^2\,dx = \sum_{k=1}^{n} \Big(k^2 - \int_{k-1}^{k} x^2\,dx \Big)$$

(Toto je pre ľudí, ktorí sú zasvätení do matematickej analýzy!!!)

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big(k^2 - \frac{k^3 - (k-1)^3}{3} \Big) = \sum_{k=1}^{n} (k - \frac{1}{3}).$$

Už vieme vyjadriť E_n an potom aj $\square_n$.

Metóda 5: Rozvíjaj, upravuj a uvidíš.

Iný spôsob určenia explictného výrazu pre $\square_n$ je nahradenie pôvodného súčtu zdanlivo komplikovanejším dvojitým súčtom, ktorá v skutočnosti môže byť zjednodušená

$$\begin{aligned} \square_n = \sum_{1 \le k \le n} k^2 &= \sum_{1 \le j \le k \le n} k \\ &= \sum_{1 \le j \le n} \sum_{j \le k \le n} k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \le j \le n} \big(n(n+1) + j - j^2) \big) \end{aligned}$$

Posledný krok je podobný perturbačnej metóde, pretože dostávame rovnicu s neznámou veličinou na oboch stranách.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}n^2(n+1) + \frac{1}{4}n(n+1) - \frac{1}{2}\square_n \\ &= \frac{1}{2}n \left(n + \frac{1}{2} \right) (n+1) - \frac{1}{2}\square_n. \end{aligned}$$

Prechod od jednoduchého súčtu k viacnásobnému sa môže zdať na začiatku ako krok späť, ale v skutočnosti je to pokrok pretože dostávame súčty, s ktorými sa ľahšie pracuje. Nemôžeme očakávať, že pri riešení každého problému budeme neustále zjednodušovať a zjednodušovať: nedosiahneme najvyšší vrchol len lezením hore!

Metóda 6: Použi konečný kalkulus.

Metóda 7: Použi vytvárajúce funkcie.