Konečný a nekonečný kalkulus

Naučili sme sa narábať so súčtami mnohými spôsobmi. Teraz je načase získať širší pohľad pozerajúc sa na problém sumácie z vyššej úrovne. Matematici objavili „konečný kalkulus“ ako analógiu nekonečnému kalkulu, pomocou ktorého je možné pristupovať k sčitovaniu systematicky.

Nekonečný kalkulus sa zakladá na pojme operátora *derivácie* D, ktorý je definovaný

$$Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Konečný kalkulus sa zakladá na pojme operátora *diferencie* Δ, ktorý je definovaný

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x). \tag{2.42}$$

Toto je konečná varianta derivácie, v ktorej sme sa ohraničili na kladné celočíselné hodnoty h. Preto, $h = 1$ je najbližšie kladné celé číslo k 0 v zmysle „limity“ keď $h \to 0$ a $\Delta f(x)$ je hodnotou výrazu $\Delta f(x) = \big(f(x+h) - f(x)\big)/h$ pre $h = 1$.

Symboly D a Δ sa nazývajú operátory, pretože zobrazujú funkcie do funkcií. Sú to vlastne funkcie funkcií, ktorých výsledky sú funkcie. Ak f je dostatočne hladká funkcia z reálnych čísel do reálnych čísel, potom Df je tiež funkcia z reálnych čísel do reálnych čísel. Ak f je ľubovoľná reálna funkcia, tak tiež $\Delta f(x)$. Hodnoty funkcií Df a Δf v bode x sú definované vyššie.

Kedysi sme sa v analýze učili, ako operátor D pracuje na mocninných funkciách $f(x) = x^m$. V takýchto prípadoch $Df(x) = mx^{m-1}$. Toto môžeme neformálne zapísať tým, že f vynecháme

$$D(x^m) = mx^{m-1}.$$

Bolo by pekné, keby operátor Δ dával rovnako pekné výsledky. Pravdaže, čo čert nechcel, tomu tak nie je. Pozrime sa na príklad

$$\Delta(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

Ale existuje typ „m-tej mocniny“, ktorá sa operátorom Δ transformuje krajšie a to je to, čo robí konečný kalkulus zaujímavým. Táto nová m-tá mocnina je definovaná nasledujúcim pravidlom

$$x^{\underline{m}} = \overbrace{x(x-1)\ldots(x-m+1)}^{m}, \qquad \text{pre } m \geq 0. \tag{2.43}$$

Všimnime si, že malý podčiarovník pod m, ktorý znamená, že násobíme m členy, ktoré sa postupne zmenšujú. Existuje tiež zodpovedajúce označenie pre súčin členov, ktoré rastú:

$$x^{\overline{m}} = \overbrace{x(x+1)\ldots(x+m-1)}^{m}, \qquad \text{pre } m \geq 0. \tag{2.44}$$

Ak $m = 0$, definujeme $x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1$, pretože prázdny súčin sa obyčajne definuje 1 (práve ako prázdny súčet sa definuje 0).

Veličina $x^{\underline{m}}$ sa nazýva „x na klesajúce m“ a podobne $x^{\overline{m}}$ čítame „x na rastúce m“. Tieto funkcie sa nazývajú *klesajúca* a *rastúca faktorialová mocnina*, pretože majú blízky vzťah k funkcii faktoriál $n! = n(n-1)\ldots(1)$. V skutočnosti $n! = n^{\underline{n}} = 1^{\overline{n}}$.

V matematickej literatúre sa objavujú niektoré iné označenia pre faktoriálové mocniny, napríklad „Pochhammerov symbol“ $(x)_m$ pre $x^{\overline{m}}$, alebo $x^{\underline{m}}$; resp. označenie $x^{(m)}$ a $x_{(m)}$ pre $x^{\underline{m}}$. Ale označenie s podčiarovníkom a nadčiarovníkom je výstižné, lebo sa ľahko zapisuje, pamätá a neobsahuje zbytočné zátvorky.

Klesajúce mocnina $x^{\underline{m}}$ je zvlášť pekná z pohľadu Δ. Platí, že

$$\begin{aligned}\Delta(x^{\underline{m}}) &= ((x+1)^{\underline{m}}) - x^{\underline{m}}\\ &= (x+1)x\ldots(x-m+2) - x\ldots(x-m+2)(x-m+1)\\ &= mx(x-1)\ldots(x-m+2),\end{aligned}$$

a preto konečný kalkulus má šikovný zákon podobný zákonu $D(x^m) = mx^{m-1}$:

$$\Delta(x^{\underline{m}}) = mx^{\underline{m-1}}. \tag{2.45}$$

Toto je základný poznatok.

Operátor D v nekonečnom kalkule má inverzný oprátor, „anti-derivačný“ (resp. integračný operátor $\int$). Základná teoréma matematickej analýzy dáva do vzťahu D a $\int$:

$$g(x) = Df(x) \qquad \text{práve vtedy, keď} \qquad \int g(x)\,dx = f(x) + C.$$

V tomto vzťahu $\int g(x)\,dx$ označuje neurčitý integrál funkcie $g(x)$, čo je trieda funkcií, ktorých derivácia je $g(x)$. Analogicky aj Δ má inverzný operátor, „anti-diferenčný“ (alebo sumačný) operátor $\sum$. Platí tu ďalšia základná teoréma:

$$g(x) = \Delta f(x) \qquad \text{práve vtedy, keď} \qquad \sum g(x)\delta x = f(x) + C. \tag{2.46}$$

Tu výraz $\sum g(x)\delta x$ nazývame *neurčitým súčtom* a označuje triedu funkcií, ktorých *diferencia* je $g(x)$. (Poznamenajme, že malé δ zodpovedá veľkému Δ tak, ako d zodpovedá D). Konštanta C pre neurčité integrály označuje ľubovoľnú konštantu; výraz C pre neurčité súčty je ľubovoľná funkcia $p(x)$, pre ktorú platí, že $p(x+1) = p(x)$. Napríklad, C môže byť periodická funkcia $a + b\sin 2\pi x$; takéto funkcie predstavujú „konštanty“ pri diferencovaní, práve tak ako konštanty pri derivovaní. V celočíselných hodnotách je funkcia C konštantou.

Teraz sme dostatočne pripravený na úder. Nekonečný kalkulus má tiež *určité* integrály: ak $g(x) = Df(x)$, potom

$$\int_a^b g(x)\,dx = f(x)\,\Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

Preto konečný kalkulus má určité *sumy.* Ak $g(x) = \Delta f(x)$, potom

$$\sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x = f(x)\,\Big|_a^b = f(b) - f(a). \tag{2.47}$$

Táto formula dáva zmysel zápisu $\sum_a^b g(x)\delta x$ práve tak, ako predchádzajúca dáva význam zápisu $\int_a^b g(x)\,dx$

Ale, čo v skutočnosti znamená $\sum_a^b g(x)\delta x$? Tento zápis sme definovali na základe analógie a nie nevyhnutnosti a potreby. Chceme, aby sa analógia zachovala aj v budúcnosti. Preto si ľahko môžeme spomenúť na pravidlá konečného kalkulu. Ale zápis bude nepoužiteľný, ak by sme nerozumeli jeho významu. Pokúsme sa vydedukovať jeho význam sledovaním niektorých špeciálnych prípadov. Nech $g(x) = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.

Ak $b = a$, platí

$$\sum\nolimits_a^a g(x)\,\delta x = f(a) - f(a) = 0.$$

Ďalej, ak $b = a + 1$, výsledok je

$$\sum\nolimits_a^{a+1} g(x)\,\delta x = f(a+1) - f(a) = g(a).$$

Ešte všeobecnejšie, ak b zväčšíme o 1, platí

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_a^{b+1} g(x)\,\delta x - \sum\nolimits_a^b g(x)\,\delta x &= \big(f(b+1) - f(a)\big) - \big(f(b) - f(a)\big)\\ &= f(b+1) - f(b) = g(b).\end{aligned}$$

Tieto výskumy spolu s matematickou indukciou nám dovoľujú dedukovať presný význam zápisu $\sum_a^b g(x)\delta x$ vo všeobecnosti, keď a a b sú celé čísla také, že $b \geq a$:

$$\sum\nolimits_a^b g(x)\delta x = \sum_{k=a}^{b-1} g(k) = \sum_{a \leq k < b} g(k), \qquad \text{pre celé čísla } b \geq a \tag{2.48}$$

Inými slovami, určité súčty sú rovnaké ako obyčajné súčty s ohraničeniami okrem hodnoty sumačného člena v hornej hranici.

Pokúsme sa rekapitulovať trochu iným spôsobom. Predpokladajme, že máme nájsť explicitný výraz pre neznámy súčet, a predpokladajme, že ju môžeme zapísať v tvare $\sum_{a \leq k < b} g(x) = \sum_a^b g(x)\delta x$. Teória konečného kalkulu nám hovorí, že riešenie môžeme vyjadriť ako $f(b) - f(a)$, ak vieme nájsť funkciu f, ktorá je neurčitým súčtom, resp. antidiferenciou funkcie g. Podľa definície $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Jedným spôsobom, ako porozumieť tomuto princípu je vypísať si členy

$$\begin{aligned}\sum_{a \leq k < b} \big(f(k+1) - f(k)\big) = \big(f(a+1) - f(a)\big) + \big(f(a+2) - f(a+1)\big) + \dots\\ \big(f(b-1) - f(b-1)\big) + \big(f(b) - f(b-1)\big).\end{aligned}$$

Všetky členy na pravej strane sa vyrušia, okrem $f(b) - f(a)$; takže hodnota súčtu je $f(b) - f(a)$. (Súčty tvaru $\sum_{a\le k<b}\bigl(f(k+1) - f(k)\bigr)$ sú často nazývané *teleskopické* podľa analógie so zloženým teleskopom, pretože hrúbka zloženého teleskopu je určená len vonkajším polomerom najvonkajšieho tubusu a vnútorného polomeru najvnútornejšieho tubusu).

Ale pravidlo (2.48) možno použiť, len ak $b \ge a$; ale čo ak $b < a$? Podľa vzťahu (2.47)

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_a^b g(x)\delta x &= f(b) - f(a) \\ &= -\bigl(f(a) - f(b)\bigr) = -\textstyle\sum_a^b g(x)\delta x. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Toto je analógia korešpondujúca rovniciam pre konečný integrál. Podobný argument dokazuje $\sum_a^b + \sum_b^c = \sum_a^c$, pre všetky celé čísla a,b a c, čo je sumačná analógia sčitovania integrálov.

Teraz sa niektorí z nás začínajú obávať, čo nám všetky tieto paralely a analógie dali. Dobre, určité súčty nám poskytujú jednoduchú cestu na výpočet klesajúcich mocnín: zo základných zákonov (2.45), (2.47) a (2.48) odvodíme všeobecný zákon

$$\sum_{0\le k\le n} k^{\underline{m}} = \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\bigg|_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}, \qquad \text{pre celé } m, n \ge 0. \tag{2.50}$$

Táto formula je ľahko zapamätateľná, pretože je veľmi podobná formuli

$$\int_0^n x^m\,dx = n^{m+1}/(m+1).$$

Špeciálne, keď $m = 1$, dostávame $k^{\underline{1}} = k$. Princípy konečného kalkulu nám dávajú jednoduchú možnosť na zapamätanie faktu, že

$$\sum_{0\le k<n} k = \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Nový spôsob, ako môžeme sčitovať obyčajné mocniny, sa zakladá na tom, že najprv vyjadríme mocninu pomocou klesajúcich mocnín. Napríklad

$$k^2 = k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}},$$

odkiaľ

$$\sum_{0\le k<n} k^2 = \frac{n^{\underline{3}}}{3} + \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \frac{1}{3}n(n-1)(n-2+\frac{3}{2}) = \frac{1}{3}n(n-\frac{1}{2})(n-1).$$

Nahradením n výrazom $n+1$ nám dá ešte jeden spôsob ako vypočítať hodnotu našeho starého známeho priateľa $\Box_n = \sum_{0\le k\le n} k^2$ v explicitnom tvare.

Jeej, to bolo nádherne ľahké. Jedoduché výpočty nám ukážu, že

$$k^3 = k^{\underline{3}} + 3k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}.$$

Preto

$$\sum_{a\le k<b} k^3 = \frac{k^{\underline{4}}}{4} + k^{\underline{3}} + \frac{k^{\underline{2}}}{2}\Big|_a^b .$$

Klesajúce mocniny sú veľmi pekné pre súčty. Ale majú nejaké iné oslobodzujúce rysy? Musíme konvertovať naše staré priateľské klasické mocniny na klesajúce mocniny pred sčitovaním, ale musíme ich konvertovať späť skôr než chceme urobiť hocičo iné? Často je možné pracovať priamo s faktoriálovými mocninami, pretože oni majú dodatočné vlastnosti. Napríklad, práve ako $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ z toho vyplýva $(x+y)^{\underline{2}} = x^{\underline{2}}+2x^{\underline{1}}y^{\underline{1}}+y^{\underline{2}}$ a podobná analógia platí medzi $(x+y)^m$ a $(x+y)^{\underline{m}}$.

Doposiaľ sme uvažovali len mocniny s klesajúcim exponentom, ktoré majú nezáporné exponenty. Na rozšírenie analógii s klasickými mocninami na záporné exponenty, potrebujeme mať vhodnú definíciu $x^{\underline{m}}$ pre $m \le 0$. Všimnime si postupnosť

$$\begin{aligned} x^{\underline{3}} &= x(x-1)(x-2), \\ x^{\underline{2}} &= x(x-1), \\ x^{\underline{1}} &= x, \\ x^{\underline{0}} &= 1, \end{aligned}$$

a vidíme, že aby sme z výrazu $x^{\underline{3}}$ dostali výraz $x^{\underline{2}}$ a z neho výraz $x^{\underline{1}}$ a z neho $x^{\underline{0}}$ delíme výrazy postupne výrazmi $x-2$,$x-1$ a x. Zdá sa rozumné (ak nie nutné), aby sme v nasledujúcom kroku delili výrazom $x+1$ na transformáciu od výrazu $x^{\underline{0}}$ k výrazu $x^{\underline{-1}}$, a preto $x^{\underline{-1}} = \frac{1}{(x+1)}$. Prvých pár mocnín s klesajúcimi exponentami majú tvar

$$\begin{aligned} x^{\underline{-1}} &= \frac{1}{x+1}, \\ x^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)}, \\ x^{\underline{-3}} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \end{aligned}$$

a vo všeobecnosti definujeme mocninu s klesajúcim exponentom pre záporný exponent

$$x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)}, \qquad \text{pre } m>0. \tag{2.51}$$

(Je tiež možné definovať mocninu s klesajúcim exponentom pre reálne alebo dokonca aj pre komplexné m, ale to robiť nebudeme.) Takto definované mocniny s klesajúcimi exponentami majú pekné vlastnosti. Snáď najdôležitejšie je všeobecný zákon pre exponenty, analogicky k zákonu

$$x^{m+n} = x^m x^n$$

pre klasické mocniny. Verzia pre mocniny s klesajúcimi exponentami je

$$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}, \qquad \text{pre celé čísla } m \text{ a } n. \tag{2.52}$$

Napríklad $x^{\underline{2+3}} = x^{\underline{2}}(x-2)^{\underline{3}}$, a pre záporné n dostávame

$$x^{\underline{2-3}} = x^{\underline{2}} = (x-2)^{\underline{-3}}x(x-1)\frac{1}{(x-1)x(x+1)} = \frac{1}{x+1} = x^{\underline{-1}}.$$

Ak by sme sa rozhodli definovať $x^{\underline{-1}}$ ako $1/x$ namiesto $1/(x+1)$, zákon pre exponenty (2.52) by zlyhal v prípadoch typu $m = -1$ a $n = 1$. V skutočnosti, mohli by sme použiť vzťah (2.52) na to, aby sme zistili koľko mocnín s klesajúcim exponentom musí byť definované v prípade pre záporné exponenty, položením $m = -n$. Keď existujúce označenie je rozšíriteľné na pokrytie viacerých prípadov, je vždy najlepšie formulovať definíciu tak, aby všeobecné zákony naďalej platili.

Teraz sa ubezpečme, že rozhodujúca vlastnosť diferencie platí aj pre nami novo definované mocniny s kleasjúcim exonentom. Platí tiež, že $\Delta x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}$, keď $m < 0$? Ak napríklad $m = -2$, diferencia je

$$\begin{aligned} x^{\underline{-2}} &= \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{(x+1)-(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= -2x^{\underline{-3}}. \end{aligned}$$

Fajn—funguje to! Podobne aj pre všetky $m < 0$.

Ukázali sme, že sumačná vlastnosť (2.50) platí aj pre záporné mocniny s kleasajúcimi exponentami rovnako ako pre kladné exponenty, kým sa neobjaví žiadne delenie nulou:

$$\sum\nolimits_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x = \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\bigg|_a^b \qquad \text{pre celé } m \neq -1.$$

Ale čo v prípade, keď $m = -1$?. Pripomeňme si, že v integrálnom počte používame

$$\int_a^b x^{-1}\,dx = \ln x\,|_a^b$$

keď $m = -1$. Radi by sme dostali analogiu funkcie $\ln x$. Inými slovami hľadáme funkciu $f(x)$ takú, že

$$x^{\underline{-1}} = \frac{1}{x+1} = \Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Nie je ťažké vidieť, že

$$f(x) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{x}$$

je vhodná funkcia, ktorá spĺňa horeuvedenú podmienku. Keď x je celočíselné, táto veličina sa rovná harmonickému číslu H_x zo vzťahu (2.13). Preto H_x je diskrétna analógia spojitej funkcie $\ln x$. (Nie je bez zaujímavostí, že pre celočíselné hodnoty x, hodnota $H_x - \ln x$ je približne $0.577 + 1/(2x)$ pre veľké x. Preto H_x a $\ln x$ nie sú len analogické funkcie, ale ich hodnoty sa vždy odlíšujú menej ako 1.)

Teraz uvedieme úplnú definíciu súčtu s mocninami s klesajúcimi exponentami:

$$\sum\nolimits_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x = \begin{cases} \frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\Big|_a^b, & \text{pre } m \neq -1; \\ H_x\,\Big|_a^b, & \text{pre } m = -1. \end{cases} \tag{2.53}$$

Táto formula naznačuje, prečo harmonické čísla sa vyskytujú v riešeniach diskrétnych úloh, napríklad pri analýze triedenia quick-sortu. Rovnako ako tzv. prirodzené logaritmy vznikajú prirodzene v riešeniach spojitých úloh.

Dobre, našli sme analógiu k funkcii $\ln x$. Poďme sa pozrieť, či existuje aj funkcia e^x. Aká funkcia $f(x)$ má vlastnosť $\Delta f(x) = f(x)$, čo zodpovedá identite $De^x = e^x$?. To je ľahké:

$$f(x+1) - f(x) = f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x+1) = 2f(x);$$

Budeme sa zaoberať jednoduchým rekurentým vzťahom, pričom funkciu $f(x) = 2^x$ budeme považovať za diskrétnu exponenciálnu funkciu.

Diferencia funkcie c^x je pre ľubovoľné c jednoduchá, konkrétne

$$\Delta(c^x) = c^{x+1} - c^x = (c-1)c^x.$$

Preto anti-diferencia funkcie c^x je funkcie $c^x/(c-1)$, ak $c \neq -1$. Tento poznatok spolu so základnými zákonmi (2.47) a (2.48) nám dávajú peknú možnosť, ako inak porozumieť všeobecnej formule pre súčte geometrickej rady:

$$\sum_{a \le k < b} c^k = \sum\nolimits_a^b c^x\,\delta x = \frac{c^x}{c-1}\Big|_a^b = \frac{c^b - c^a}{c-1}, \qquad \text{pre } c \neq 1.$$

Vždy, keď sa stretneme s funkciou f, ktorá by mohla byť ako explicitný výraz, vieme vypočítať jej diferenciu $\Delta f = g$; potom máme funkciu g, ktorej neurčitý súčet $\sum g(x)\delta x$ je známy.

$f = \sum g$	$\Delta f = g$	$f = \sum g$	$\Delta f = g$
$x^{\underline{0}} = 1$	0	2^x	2^x
$x^{\underline{1}} = x$	1	c^x	$(c-1)c^x$
$x^{\underline{2}} = x(x-1)$	$2x$	$c^x/(c-1)$	c^x
$x^{\underline{m}}$	$mx^{\underline{m-1}}$	cf	$c\Delta f$
$x^{\underline{m+1}}/(m+1)$	$x^{\underline{m}}$	$f+g$	$\Delta f + \Delta g$
H_x	$x^{\underline{-1}} = 1/(x+1)$	fg	$f\Delta g + Eg\Delta f$

Napriek všetkým paralelám medzi spojitou a diskrétnou matematikou, niektoré pojmy zo spojitej matematiky nemajú obdobu v diskrétnej matematike. Napríklad, pravidlo derivácie zloženej funkcie v infinitezimálnom počte, ktoré popisuje, ako získať deriváciu funkcie závisiacej na nejakej funkcii. V konečnom kalkule niet žiadnej obdoby tohoto zákona, pretože tu neexistuje žiadny pekný výraz typu $\Delta f(g(x))$. Zámena premennej v diskrétnom kalkule je zložitejšia, snáď okrem prípadu substitúcie výrazu $c \pm x$ za premennú x.

Avšak, $\Delta\big(f(x)g(x)\big)$ *má* celkom pekný tvar, a umožňuje nám *sumáciu po častiach*, ako konečnú variantu toho, čo v infinitezimálnom počte nazývame integrovanie po častiach (per-partes). Pripomeňme si tú formulu

$$D(uv) = uDv + vDu$$

infinitezimálneho počtu, na základe ktorej funguje pravidlo integrovania po častiach

$$\int uDv = uv - \int vDu.$$

Niečo podobné môžeme urobiť v konečnom kalkule.

Začnime použitíme oprátora diferencie na súčin dvoch funkcii $u(x)$ a $v(x)$:

$$\begin{aligned} \Delta\big(u(x)v(x)\big) &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x) \\ &= u(x+1)v(x+1) - u(x)v(x+1) \\ &+ u(x)v(x+1) - u(x)v(x) \\ &= u(x)\Delta v(x) + v(x+1)\Delta u(x). \end{aligned} \tag{2.54}$$

Túto formulu môžeme prepísať do tradičného tvaru použitím *operátora posunu* E, ktorý je definovaný nasledovne

$$Ef(x) = f(x+1).$$

Nahradením miesto $v(x+1)$ dostávame kompaktný tvar pravidla pre diferenciu súčinu:

$$\Delta(uv) = u(x)\Delta v(x) + v(x+1)\Delta u(x). \tag{2.55}$$

(Operátor E je vlastne len taká nuansa, ktorá však robí rovnicu korektnou.)

Ak uvažujeme neurčité súčty na oboch stranách rovnice a preusporiadame členy, dostaneme reklamované previdlo pre sčitovanie po častiach:

$$\sum u\Delta v = uv - \sum Ev\Delta u \tag{2.56}$$

Podobne, ako v inifinitezimálnom kalkule, ku všetkým trom členom môžeme pripísať hranice, čím sa stanú neurčité súčty určitými.

Toto pravidlo je užitočné, ak súčet na ľavej strane je ťažšie vypočítateľný ako na pravej strane. Pozrime sa na príklad. Funkcia $\int xe^x\,dx$ je typická funkcia vhodná na integrovanie po častiach; jej diskrétna varianta je $\sum x2^x\,\delta x$, s ktorou sme sa v minulosti stretli v tvare $\sum_{k=0}^{n} k2^k$. Na sčítanie po častiach, položíme $u(x) = x$ a $\Delta v(x) = 2^x$, lebo $\Delta u(x) = 1$, $v(x) = 2^x$ a $Ev(x) = 2^{x+1}$. Dosadením do rovnosti (2.56) dostávame

$$\sum x2^x\,\delta x = x2^x - \sum 2^{x+1}\,\delta x = x2^x - 2^{x+1} + C.$$

Po dosadení hraníc dostávame

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k2^k &= \sum\nolimits_0^{n+1} x2^x\,\delta x\\ &= x2^x - 2^{x+1}\,\Big|_0^{n+1}\\ &= \big((n+1)2^{n+1} - 2^{n+2}\big) - (0\cdot 2^0 - 2^1) = (n-1)2^{n+1} + 2.\end{aligned}$$

Je ľahšie nájsť tento súčet touto metódou ako metódou perturbácie, lebo nemusíme rozmýšľať.

V tejto kapitole sme sa prekúsali cez formulu pre $\sum_{0\le k<n} H_k$ a cítili sme sa šťastne. Ale mohli sme nájsť formulu (2.36) sytematicky, keby sme vedeli niečo o sčitovaní po častiach. Demoštrujme toto tvrdenie na súčte, ktorý vyzerá ešte ťažšie, $\sum_{0\le k<n} kH_k$. Riešenie nie je zložité, ak sa necháme viesť analógiou s integrálom $\int x\ln x\,dx$. Nech $u(x) = H_x$ a $\Delta v(x) = x = x^{\underline{1}}$, lebo $\delta u(x) = x^{\underline{-1}}$, $v(x) = x^{\underline{2}}/2$, $Ev(x) = (x+1)^{\underline{2}}/2$ a platí, že

$$\begin{aligned}\sum xH_x\delta x &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \sum \frac{(x+1)^{\underline{1}}}{2}x^{\underline{-1}}\delta x\\ &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \frac{1}{2}\sum x^{\underline{1}}\delta x\\ &= \frac{x^{\underline{2}}}{2}H_x - \frac{x^{\underline{2}}}{4} + C.\end{aligned}$$

(V prvkom riadku sme použitím zákona o exponentoch (2.52) zlúčili dve mocniny s klesajúcimi expomentami $(x+1)^{\underline{2}}x^{\underline{-1}}$.) Teraz môžeme dopísať hranice a dostávame, že

$$\sum_{0\le k<n} kH_k = \sum\nolimits_0^n xH_x\delta x \;=\; \frac{n^{\underline{2}}}{2}\Big(H_n - \frac{1}{2}\Big). \tag{2.57}$$

Literatúra

Uvedená kapitoly o sumách sú voľným prekladom prvej časti 2.kapitoly knihy R. Grahama, D. E. Knutha a O. Patashnika: *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1989. Ďakujem svojmu kolegovi M. Winczerovi, ktorý mi poskytol zdrojový súbor prekladu a tým mi ušetril drahocenný čas.