! ! ! Dokument vo výstavbe ! ! !

Obsah

1. Rekurentné problémy

1.1. Matematická indukcia

Niekoľko dobrých rád:

1. Dôkaz matematickou indukciou má 2 kroky, ani jeden z nich nemožno vynechať.
2. Skôr než začnete niečo matematickou indukciou dokazovať, sformulujte jasne dokazované tvrdenie.
3. Skôr než začnete dokazovať 2. krok matematickej indukcie, sformulujte indukčný predpoklad a dokazovaný záver.
4. Použitie indukcie v úlohách je nasledovné:
   1. Uhádnite výsledok.
   2. Dokážte ho indukciou.

1. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
3. $\forall n \in \mathbb{N} : 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$
4. $\forall n \in \mathbb{N} : 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$
5. $\forall n \in \mathbb{N} : 1^2 - 2^2 + \cdots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{2}n(n+1)$
6. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$
7. $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1 : \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$

2. Dokážte:

1. Ak $x > -1$ a $n \in \mathbb{N}$, tak $(1+x)^n \geq 1 + nx$ *(Bernoulliho nerovnosť)*.
2. Nech $n \in \mathbb{N}$, nech $x_1, \ldots, x_n$ sú reálne čísla rovnakého znamienka všetky väčšie ako -1. Potom $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

3. Dokážte tvrdenia:

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1 : n + 1 < 2^n$
2. $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}.\cdots.\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$
3. $\forall n \in \mathbb{N} : (2n)! < 2^{2n}(n!)^2$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1 : n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : 2!\,4!\,6!\ldots(2n)! > ((n+1)!)^n$
6. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 : n^{n+1} > (n+1)^n$

4.

1. Dokážte, že platí: ak $x_1 > 1, x_2 < 1$, tak $x_1 + x_2 > x_1x_2 + 1$.
2. Na základe toho dokážte: Nech $x_1, \ldots, x_n$ sú kladné čísla také, že $x_1x_2\ldots x_n = 1$. Potom $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$.
3. Na základe toho dokážte: $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}}{x_n} + \dfrac{x_n}{x_1} \geq n$, kde $x_1, \ldots x_n$ sú kladné čísla.
4. Na základe toho dokážte *(AG-nerovnosť)*: $\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leq \dfrac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$, kde $x_1, \ldots x_n$ sú kladné čísla.

5. Dokážte nerovnosti:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$

Fibonacciho postupnosť je definovaná nasledovne:

$F_0=0$,
$F_1=1$,
$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $n\geq 0$.

6. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. $F_1+F_3+\cdots+F_{2n+1}=F_{2n+2}$
2. $1+F_2+F_4+\cdots+F_{2n}=F_{2n+1}$
3. $F_n^2-F_{n+1}F_{n-1}=(-1)^{n+1}$
4. $\sum_{k=1}^{n}F_k^2=F_nF_{n+1}$
5. $F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}^2$

7. Nájdite súčet: $F_0+F_1+\cdots+F_n$

1.2. Rekurentné úlohy

Niekoľko dobrých rád:

1. Niekedy sa oplatí vypísať si prvých niekoľko skúmaných hodnôt pre malé n. Môže to pomôcť pri zostavení rekurentných rovníc, či priamo uhádnutí výsledku, ktorý sa potom dokáže matematickou indukciou.
2. Pokúste sa nájsť všeobecnú závislosť medzi hodnotami a tak zostaviť rekurentné rovnice (ak závislosť nie je zrejmá, treba ju dokázať napr. matematickou indukciou). Potom už bude potrebné len rekurencie vyriešiť.
3. Snažte sa výsledok upraviť do uzavretého tvaru, t.j. tvaru, ktorý už neobsahuje sumy ani rekurencie, tak, ako sa výrazy upravovať zvyknú (t.j. podľa matematickej krásy).

Rovnicu $f(n)=af(n-1)+b$ možno riešiť buď tak, že:

1. za $f(n-1)$ dosadíme $af(n-2)+b$, čím dostaneme $f(n)=a^2f(n-2)+ab+b$ a ak budeme v takomto rozvíjaní pokračovať, až kým nedostaneme $f(1)$, čo je známa hodnota, získame riešenie.
2. Inou možnosťou je urobiť substitúciu $g(n)=f(n)+c$, kde c je zatiaľ neznáma konštanta. Po dosadení do pôvodnej rekurencie dostávame $g(n)=ag(n-1)-ac+c+b$, $g(1)=f(1)+c$. Ak zvolíme c tak, aby $c-ac+b=0$ (ak sa to dá), máme rekurenciu pre $g(n)$, ktorá však popisuje geometrickú postupnosť, takže ju ľahko vyriešime. Táto metóda má oveľa širšie použitie. Pri zložitejších úlohách je možné zvoliť v substitúcii aj neznámu funkciu $c(n)$: $g(n)=f(n)+c(n)$. Ak o nej vieme napr., že je to polynóm, môžme použiť metódu neurčitých koeficientov. Táto metóda úzko súvisí s lineárnymi diferenčnými rovnicami s nenulovou pravou stranou.

8. Riešte rekurencie:

1. $y_1=5$
   $y_{n+1}=2y_n-3\,,\quad n\geq 1$
2. $T_0=1,\quad T_1=2$
   $T_{n+2}=T_{n+1}+T_n-1\,,\quad n\geq 0$
3. $z_1=3$
   $z_{n+1}=2(z_n+n)-n^2+1\,,\quad n\geq 1$
4. $R_0=0,\quad R_1=2$
   $R_{n+2}=R_{n+1}+R_n-n-1\,,\quad n\geq 0$

9. (O Jozefovi):

1. V kruhu stojí $n\geq 1$ očíslovaných ľudí. Postupujúc v smere hodinových ručičiek dookola, každý druhý spácha samovraždu. Na ktorú pozíciu $J(n)$ sa má postaviť chudák Jozef, aby zostal posledný a nemusel už spáchať samovraždu ?
2. Je dané $k\geq 1$. V kruhu stojí $n\geq k$ očíslovaných ľudí. Postupujúc v smere hodinových ručičiek, každý druhý spácha samovraždu. Na ktoré pozíciu $J(n,1),\ldots J(n,k)$ sa má postaviť k priateľov, aby zostali poslední a nemusel už spáchať samovraždu ?
3. Je dané $k\geq 1$. V kruhu stojí $n\geq 1$ očísloavných ľudí. Postupujúc v smere hodinových ručičiek, každý k-ty spácha samovraždu. Na ktorú pozíciu $J_k(n)$ sa má postaviť chudák Jozef, aby zostal posledný a nemusel už spáchať samovraždu ?

10. Zamyslite sa nad hodnotou $J^k(n)=\underbrace{J(J(\ldots J(n)\ldots))}_{k}$ a určte $J^*(n)=\lim\limits_{k\to\infty}J^k(n)$.

11. Určte nasledujúce hodnoty:

1. Na aký maximálny počet častí rozdelí rovinu n priamok ?
2. Na aký maximálny počet ohraničených častí rozdelí rovinu n priamok ?
3. Na aký maximálny počet častí rozdelí rovinu n kružníc ?

4. V rovine je daný bod A. Na aký maximálny počet častí rozdelí rovinu n kružníc, z ktorých každá prechádza bodom A ?
5. Na aký maximálny počet častí rozdelí rovinu n 1-krát zalomených lomených čiar ?
6. Na aký maximálny počet častí rozdelí rovinu n elíps ?
7. Na aký maximálny počet častí rozdelí 3-rozmerný priestor n rovín ?
8. Na aký maximálny počet častí rozdelí 3-rozmerný priestor n guľových plôch ?

12. (Hanojské veže a dvojveže):

1. K dispozícii sú 3 žrde **A, B, C**. Na žrdi **A** sa nachádza n diskov po dvoch rôznych veľkostí zoradených tak, že najväčší je naspodku a najmenší navrchu. Úlohou je presunúť disky zo žrde **A** na žrď **B** za pomoci žrde **C**. Pri presunoch platí, že sa nikdy nemôže väčší disk nachádzať na menšom. Na aký najmenší počet presunov a_n je možné túto úlohu pre n diskov vyriešiť ? Akým postupom ?
2. K dispozícii sú 3 žrde **A, B, C**. Na žrdi **A** sa nachádza $2n$ diskov n po dvoch rôznych veľkostí, z každej práve 2 kusy, zoradených tak, že najväčší je naspodku a najmenší navrchu. Disky sú zhora nadol očíslovaných číslami $1 \dots 2n$. Úlohou je presunúť disky zo žrde **A** na žrď **B** za pomoci žrde **C**, a to tak, že na výslednom poradí 2 rovankých kotúčov na žrdi **B** nezáleži. Pri presunoch platí, že sa nikdy nemôže väčší disk nachádzať na menšom. Kotúče rovnakých veľkostí môžu byť na sebe uložené oboma spôsobmi. Na aký najmenší počet presunov b_n je možné túto úlohu pre n diskov vyriešiť ? Akým postupom ?
3. Riešte predchádzajúcu úlohu za predpokladu, že v cieľovej pozícii sú disky na žrdi **B** opäť zhora nadol očíslované $1 \dots 2n$. Určte najmenší počet presunov c_n.

Ďalším dôležitým typom rekurencie je je rekurencia s parametrami. Pokiaľ je so zadania zrejmé (alebo to viete dokázať), že výsledok je lineárnou kombináciou parametrov, je možné použiť metódu budovania repertoáru. Pokiaľ v zadaní parametre zvolené nie sú, treba vytypovať, ktoré konšatnty zvoliť za parametre, pre ktoré sa bude hľadať všeobecné riešenie. Ak zvolíte parametrov priveľa, bude riešenie ťažké a zložité; ak primálo, nepodarí sa vám použiť metódu budovania repertoáru.

Budovanie repertoáru: Ak sa v zadaní rekurencie $f(n)$ vyskytujú konštanty $\alpha,\beta,\dots$ a je dokázané (alebo zrejmé), že pre každé konkrétné n je $f(n)$ lineárnou kombináciou parametrov $\alpha,\beta,\dots$ (nie nutne pre každé n tou istou), tak vieme, že všeobecné riešenie rekurencie má tvar $f(n)=A(n)\alpha+B(n)\beta+\dots$, kde $A(n),B(n),\dots$ sú neznáme funkcie. Keďže riešenie je všeobecné, ľubovoľné dosadenie za konštanty musí byť konzistentné, t.j. ak za konštanty dosadíme do pôvodného zadania rekurencie, rekurenciu vyriešime v tomto prípade a dostaneme tak $f(n)$, to isté dosadenie nám dá rovnicu

$$\forall n \in N : f(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta + \dots$$

čo je lineárna rovnica o neznámych $A(n),B(n),\dots$. Ak ich budeme mať dostatočne veľa nezávislých, riešenie sústavy určí neznáme funkcie. Problémom zostáva, ako voliť hodnoty za konštanty $\alpha,\beta,\dots$ tak, aby vzniknuté rovnice boli užitočné a pritom sme vedeli pre túto kombináciu parametrov určiť $f(n)$. Môžme preto voliť parametre $\alpha,\beta\dots$ tak, aby sme dostali nami vopred zvolenú funkciu $f(n)$, t.j. "dosadíme" za funkciu $f(n)$ a dourčíme parametre $\alpha,\beta,\dots$. Najvhodnejšie je voliť funkcie, ktoré sú "blízko" výsledku. Repertoárovou metódou možno reiešiť aj sumy, ak si uvedomíme, že súčet $a_0+\dots+a_n$ je popísaný rekurenciou čiastočných súčtov

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 \\ y_n &= y_{n-1} + a_n, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

13. Riešte systém zovšeobecnených číselných sústav. V tomto prípade sa môžu vo výsledku vyskytovať bodky, čo umožňujeme len výnimočne, pretože bodky predstavujú nespočítanú sumu.

$$\begin{aligned} f(1) &= \alpha_1 & f(dn) &= c.f(n) + \beta_0 \\ f(2) &= \alpha_2 & f(dn+1) &= c.f(n) + \beta_1 \\ &\vdots & &\vdots \\ f(d-1) &= \alpha_{d-1} & f(dn+d-1) &= c.f(n) + \beta_{d-1} \end{aligned}$$

14. Riešte rekurencie:

1. $g(0) = \alpha$
$g(n) = 2g(n-1) + 2^n\delta + \gamma n + \beta, \qquad n \geq 1$
2. $g(0) = \alpha$
$g(n) = 2g(n-1) + (-1)^n n\gamma + (-1)^n\delta + \beta, \qquad n \geq 1$
3. $g(0) = \alpha$
$g(n) = 2g(n-1) + \delta n^2 + \gamma n + \beta, \qquad n \geq 1$
4. $g(1) = \alpha$
$g(2n) = 3g(n) + \gamma n + \beta_0$
$g(2n+1) = 3g(n) + \gamma n + \beta_1, \qquad n \geq 1$

15. Repertoárovou metódou nájdite súčet $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k$

1.3. Vzťah súm a rekurencií

> Riešiť rekurenciu $y_0 = a_0; \quad y_n = y_{n-1} + a_n$ znamená nájsť sumu
>
> $$y_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$
>
> Riešiť rekurenciu, v ktorej rekurentná časť má tvar $a_n y_n = b_n y_{n-1} + c_n$ možno prevedením na predchádzajúci typ, ak ju prenásobíme vhodným výrazom s_n takým, že $b_n s_n = a_{n-1}s_{n-1}$ a zavedieme substitúciu $g_n = a_n s_n y_n$.

16. Riešte rekurencie:

1. $T_1 = \frac{3}{2}$
$$T_n = \frac{n-1}{3n}T_{n-1} + \frac{1}{n}, \qquad n > 1$$
2. $T_1 = 0$
$$T_n = \frac{T_{n-1}}{n+1} + \frac{1}{n!}, \qquad n \geq 2$$
3. $T_0 = 0$
$$T_{n+1} = \frac{n}{n+1}T_n + \frac{1}{n+1}, \qquad n \geq 0$$
4. $T_0 = 1$
$$T_n = \frac{T_{n-1}}{n} + \frac{2^{n-1}}{n!}, \qquad n \geq 1$$
5. $T_1 = 0$
$$\frac{T_{n+1}}{n} = \frac{T_n}{n+1} + \frac{1}{n}, \qquad n \geq 1$$
6. $T_1 = 0$
$$\frac{T_{n+1}}{2^n} = \frac{T_n}{2^{n+1}} + \frac{n}{4^n}, \qquad n \geq 1$$
7. $T_0 = 5$
$2T_n = nT_{n-1} + 3n!, \quad n > 0$

17. Riešte rekurenciu:

$$T_1 = 2$$
$$T_2 = 1$$
$$\frac{1}{n!} + T_n = \frac{T_{n-1}}{n} + \frac{T_{n-2}}{n^2 - n}, \qquad n \geq 3$$

1.4. Ďalšie úlohy

18. Za predpokladu, že α, β sú zvolené tak, že $\forall n \in \mathbb{N}_0 : Q_n \neq 0$, riešte rekurenciu:

$$Q_0 = \alpha$$
$$Q_1 = \beta$$
$$Q_n = \frac{1 + Q_{n-1}}{Q_{n-2}}, \qquad n > 1$$

19. Nech

$$u_1 = u_2 = 1$$
$$u_n = 2u_{n-1} + \sqrt{u_{n-1}u_{n-2}} + (-1)^{n+1}, \qquad n > 2$$

Dokážte, že prvky postupnosti $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú celé čísla.

20. Nech p je nepárne celé číslo a nech rovnica $x^2 - px + 1 = 0$ má korene x_1, x_2. Dokážte, že čísla $x_1^{1995} + x_2^{1995}$, $x_1^{1996} + x_2^{1996}$ sú celé a nesúdeliteľné.

21. Golombova samopopisujúca sa postupnosť $F(k)$, $k \geq 1$ je definovaná ako jediná neklesajúca postupnosť prirodzených čísel s vlastnosťou, že počet výskytov čísla k v nej je práve $F(k)$, $k \geq 1$ Ľahko vidieť jej začiatok:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$F(k)$	1	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	6

Nech $G(n)$ je najväčšie také m, že $F(m) = n$. Dokážte, že

$$G(G(n)) = \sum_{k=1}^{n} kF(k)$$

22. Postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je definovaná nasledovne:

$$\left.\begin{aligned} a_{4n-1} &= 0 \\ a_{4n-3} &= 1 \\ a_{2n} &= a_n \end{aligned}\right\} \quad n \geq 1$$

Dokážte, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie je periodická.

23. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná takto:

$$a_1 = a_2 = 1$$
$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}, \quad n \geq 3$$

Dokážte, že členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú celé čísla.

24. Dokážte, že

1. $\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall m \in \mathbb{N}: \quad F_{n+m} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}_0: \quad F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^n$
3. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$
4. $\forall n \in \mathbb{N}: \quad F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2: \quad F_n^4 - F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} = 1$

25. Dokážte, že ľubovoľné 2 po sebe idúce Fibonacciho čísla sú nesúdeliteľné.

26. Nájdite vyjadrenie postupnosti a_n v uzavretom tvare:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$a_n = \sqrt{3.(a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2)}, \qquad n \geq 1$$

27. Nájdite vyjadrenie postupnosti T_n v uzavretom tvare:

$$T_0 = \frac{4}{\sqrt[3]{7}}$$
$$T_{n+1} = \sqrt[3]{7.(T_0^3 + T_1^3 + \cdots + T_n^3)}, \qquad n \geq 0$$

28. Nájdite vyjadrenie postupnosti b_n v uzavretom tvare:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{2} \\ a_n &= a_0^2.a_1^2.\dots.a_{n-1}^2, \qquad n \geq 1 \\ b_n &= \log_2 a_n, \qquad n \geq 0 \end{aligned}$$

29. Nájdite vyjadrenie postupnosti T_n v uzavretom tvare:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 = 2 \\ T_{n+1} &= \left(2 + \frac{1}{n}\right) T_n - \left(1 + \frac{1}{n}\right) T_{n-1}, \qquad n \geq 2 \end{aligned}$$

2. Základné sumačné metódy

2.1. Jednoduché sumy

30. Nájdite súčty:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k+2^k}{6^k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2^k}$

Ak sa vám podarí napísať pri výpočte sumy $a_0+\dots a_n$ výraz a_k v tavre $b_{k+1}-b_k$, tak $a_1+\dots+a_n=b_0-b_1+b_1-b_2+\dots+b_n+b_{n+1}=b_{n+1}-b_0$. Takéto sumy sa nazývajú teleskopické. Teleskopizácia súm súvisí s neurčitou sumáciou. V prípade súm racionálnych lomených výrazov zvážte ako heuristiku rozklad na parciálne zlomky.

Harmonické čísla m-teho rádu sú definované nasledovne:

$$H_n^{(m)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^m}$$

Špeciálne $H_n=H_n^{(1)}$. Dohodou je $H_0^{(m)}=0$. Harmonické čísla nie sú vyjadriteľné v uzavretom tvare. Sú však známe ich asymptotiky a sú natoľko dôležité, že sa môžu vyskytovať v uzavretom tvare výsledku za predpokladu, že výsledok už nemožno ďalej zjednodušiť (napr. výsledok $H_{n+1}-H_n$ nie je v poriadku, možno ho totiž upraviť na $\frac{1}{n+1}$). Doporučuje sa upraviť výsledok tým spôsobom, že všetky indexy harmonických čísel v ňom sú rovnaké (pokiaľ sa to dá). Okrem toho, že výrazy typu $H_{n+1}-H_n$ sa týmto upravia "samé", uľahčuje to kontrolu výsledku, pretože ho možno zapísať viacerými spôsobmi, o ktorých nie je na prvý pohľad zrejmé, že sú rovnaké (napr. $(n+1)H_{n+1}=nH_n+1$).

Ak označíme $H_\infty^{(m)}=\lim\limits_{n\to\infty}H_n^{(m)}$, tak platí, že $H_\infty=\infty$, $H_\infty^{(m)}=\zeta(m)$, pre $m>1$, špeciálne $H_\infty^{(2)}=\frac{\pi^2}{6}$

31. Nájdite súčty:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k.k!$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k-1}{k!}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$

32. Nájdite súčty:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{k(2k+2)}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k+3}}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+2)k!}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k.k}{4k^2-1}$

33. Nájdite súčty:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{k(k+1)}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{k(k+1)^2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{k+1}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{(k+1)(k+2)}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k-1)^2}{k+1}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+k^2+nk+n}{n(k+1)}$

34. Nájdite súčty:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2-k^2+2n+1}{n-k+1}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2+k+1}{k+1}$
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2+k-2}{k^2-k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k^2-3k+2}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{6k+3}{9k^2+9k+2}$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^{-1}$

Jednou z možností ako riešiť sumy typu

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$$

je úprava vnútorného člena pri rozlíšení parity n. Ak n je párne, t.j. $n=2m$, tak

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k=\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k a_k=\sum_{k=1}^{m}\left((-1)^{2k}a_{2k}+(-1)^{2k-1}a_{2k-1}\right)=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k}-a_{2k-1})=\mathcal{V}(n)$$

Poslednú suma je už iného typu a určí sa inými metódami. Potom pre n nepárne je $n=2m+1$ a

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{2m+1}a_k=a_{2m+1}+\sum_{k=1}^{2m}a_k=a_n+\mathcal{V}(n-1)$$

Výsledok niekedy možno upraviť tak, aby zahrňoval oba prípady naraz.

35. Nájdite súčty:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^3$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k H_k$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k^2}(H_k+k^2)$

36. Určte $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(k+1)!}$

37. Nech $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k!\,(n-k)!$ Dokážte, že $\forall n\in\mathbb{N}:\quad S_n=\dfrac{n+1}{2}S_{n-1}+1$

2.2. Viacnásobné sumy

Silnou metódou je zámena poradia sumácie:

$$\sum_k\sum_l a(k,l)=\sum_l\sum_k a(k,l)$$

V praxi je najčastejší prípad so zmenou hraníc:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}a(k,l)=\sum_{0\le l\le k\le n}a(k,l)=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l}^{n}a(k,l)$$

To je prípad napr. súm s harmonickými číslami.

38. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k=1}^{n-1} H_k$
2. $\sum_{k=1}^{n} \sum_{1\le j<k} \frac{1}{k-j}$
3. $\sum_{k=1}^{n} kH_k$
4. $\sum_{k=0}^{n-1} kH_{n-k}$
5. $\sum_{k=1}^{n-1} k.H_k^{(2)}$
6. $\sum_{k=1}^{n-1} H_k^{(3)}$

39. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k=0}^{n-1} H_{2k+1}$
2. $\sum_{k=0}^{n-1} H_{2k}$
3. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k kH_k$
4. $\sum_{k=1}^{n-1} (H_{n-k} + H_{n+k})$
5. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} H_{k+n}$
6. $\sum_{1\le i<j\le n} \frac{1}{ij}$

40. Nájdite $\sum_{k\ge 1} H_k \frac{1}{2^k}$. (Pomôcka: $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$, $|x| < 1$ - Taylorov rad)

41. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{m=0}^{2k} \frac{k+1}{k^2+1+m} + \sum_{m=1}^{k^2} \frac{1}{m} \right)$
2. $\sum_{k=0}^{n-1} (\sum_{m=1}^{k.k!} \frac{k+1}{m+k!} + \sum_{m=1}^{k!} \frac{1}{m})$
3. $\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=1}^{2k+1} \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{p^2+k^2p}$
4. $\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{nk+p}$

42. Riešte rekurencie:

1. $T_2 = \frac{2}{3}$
$$\frac{T_{n+1}}{1+nH_{n-1}} = \frac{T_n}{1+(n+1)H_n} + \frac{1}{nH_n + n(n+1)H_n^2}, \quad n \ge 2$$
2. $T_1 = 1$
$$\frac{T_{n+1}}{H_n} = \frac{T_n}{H_{n+1}} + \frac{(n+1)H_{n+1} - 1}{(n+1)^2 H_n^2 H_{n+1}}, \quad n \ge 1$$

2.3. Integrálna, perturbačná metóda a metóda expand/contract

43. Perturbačnou metódou a metódou expand/contract určte súčet $\sum_{k=0}^{n} k.2^k$

44. Perturbačnou, integrálnou metódou a metódou expand/contract určte súčet $\sum_{k=0}^{n} k$

45. Rôznymi metódami nájdite súčty:

1. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k$
2. $(-1)^k k^2$
3. $\sum_{k=0}^{n} k^3$

46. Nájdite súčty:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k-1}{2^k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 2^k$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 4k.3^k$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.2^{-k}$

2.4. Neurčité sumy a metóda per partes

Diferenciu funkcie f definujeme ako $\Delta f(n) := f(n+1) - f(n)$. Neurčitá suma je obrátená operácia, t.j.

$$\sum f(k)\,\delta k = g(k) \iff \Delta g(k) = f(k)$$

Neurčitá sumácia je metóda využívajúca, že:

$$\sum_{a \le k < b} f(k) = g(b) - g(a), \text{ keď } g(k) = \sum f(k)\,\delta k$$

Klesajúce faktoriálne mocniny sú definované nasledovne:

$n^{\underline{0}} = 1;$ $\quad n^{\underline{m}} = n(n-1)\dots(n-m+1), \quad m > 0;$ $\quad n^{\underline{-m}} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}, \quad m > 0$

47. Nájdite diferencie nasledovných funkcií $f(k)$:

a) $k^{\underline{m}}$

b) 2^k

c) H_k

d) 2^{-k}

e) c^k

f) F_k

48. Nájdite súčet: $\displaystyle\sum_{k=0}^{1996} k^{\underline{1996}}$

49. Nájdite neurčité sumy nasledovných funkcií $f(k)$:

a) $k^{\underline{m}}, \quad m \neq -1$

b) $k^{\underline{-1}}$

c) 2^k

d) 2^{-k}

e) $c^k, \quad c \neq 1$

f) F_k

Vypočítanú určitú sumu možno použiť na nájdenie sumy neurčitej: Ak vieme, že

$$\sum_{m=0}^{n-1} a_m = \mathcal{V}(n), \text{ tak } \Delta\mathcal{V}(k) = \mathcal{V}(k+1) - \mathcal{V}(k) = \sum_{m=0}^{k} a_m - \sum_{m=0}^{k-1} a_m = a_k$$

Teda

$$\sum a_k\,\delta k = \mathcal{V}(k)$$

50. Nájdite $\sum H_k\,\delta k$

51. Nájdite súčty:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^{\underline{m}}, \quad m \ge 0$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^3$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^4$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1).(k+1)^{\underline{k+1}}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+4)^{\underline{3}}}{(k+3)^{\underline{3}}}$

52. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k . k^{\underline{-1}}$
2. $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k!\, 0^{\underline{-k+1}}$
3. $\sum_{k=-1}^{2n-2} \frac{(-1)^k}{2} \left(\frac{k}{2}\right)^{\underline{-1}}$
4. $\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k^2}(2.4^k - 1)$
5. $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^{\underline{k}}}{k}$

Metóda per partes je výpočet určitých súm na základe vzťahu:

$$\sum_{a \le k < b} \Delta a_k . b_k = a_k . b_k |_a^b - \sum_{a \le k < b} a_{k+1} . \Delta b_k$$

53. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k=1}^{n-1} k H_k$
2. $\sum_{k=1}^{n-1} k^{\underline{2}} . H_k$
3. $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 H_k$
4. $\sum_{k=1}^{n-1} H_k^2$
5. $\sum_{k=1}^{n-1} k 2^k$
6. $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 2^k$
7. $\sum_{k=1}^{n-1} k . F_k$

54. Nech m je celé číslo. Nájdite súčet $\sum_{k=1}^{n-1} k^{\underline{m}} H_k$ postupne pre

a) $m = 0$
b) $m > 0$
c) $m = -1$
d) $m < -1$

55. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} H_k$
2. $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 + k} H_k$

3. Celé a necelé časti

Dolnou celou časťou reálneho čísla x (označenie $\lfloor x \rfloor$) nazývame najväčšie celé číslo menšie ako x. Teda $\lfloor x \rfloor = n \iff n \le x < n+1$ Hornou celou časťou reálneho čísla x (označenie $\lceil x \rceil$) nazývame najmenšie celé číslo väčšie ako x. Teda $\lceil x \rceil = n \iff n < x \le n-1$. Necelou (zlomkovou) časťou reálneho čísla x (označenie $\{x\}$) nazývame číslo $x - \lfloor x \rfloor$.

56. Dokážte, že $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ alebo $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil - 1$. Zistite, kedy nastáva ktorý prípad.

57. Dokážte, že $\lceil x \rceil + \lceil -x \rceil = \neg\, x \in \mathbb{Z}$.

58. Dokážte, že ak m, n sú celé čísla a x reálne, tak

1. $m \le x \iff m \le \lfloor x \rfloor$
2. $x < n \iff \lfloor x \rfloor < n$
3. $m < x \iff m < \lceil x \rceil$
4. $x \le n \iff \lceil x \rceil \le n$

59. Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby $\lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor, \quad n \in \mathbb{Z}^+$.

60. Dokážte, že pre $m, n \in \mathbb{Z}^+, \alpha > n, \alpha$ iracionálne platí, že $\lfloor \lfloor m\alpha \rfloor n/\alpha \rfloor = mn - 1$.

61. Dokážte, že pre $m, n \in \mathbb{Z}^+$ platí $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor$

62. Riešte rovnice v $\mathbb{R}$:

1. $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 3x \rfloor$
2. $\lfloor x \rfloor^2 = \lceil x \rceil^2$
3. $\lfloor \frac{1}{2} \lfloor x \rfloor \rfloor = \lceil x \rceil$
4. $\lceil \frac{1}{2} \lceil x \rceil \rceil = \lfloor x \rfloor$

63. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rastúca spojitá funkcia a vlastnosťou, že $f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}$. Potom $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$. Dokážte.

64. Dokážte, že $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \le \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

65. Dokážte, že postupnosť $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, \ldots$ (začínajúca členom a_1) je explicitne daná vzťahom

$$a_n = \left\lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

66. Nech $b, x \in \mathbb{R}$. Pre ktoré $b > 1$ platí, že pre $\forall x \ge 1 : \quad \lfloor \log_b x \rfloor = \lfloor \log_b(\lfloor x \rfloor) \rfloor$?

67. Dokážte, že pre $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$$

68. Definujme postupnosť $\mathtt{Spec}(\alpha) = \lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \ldots$ Dokážte, že množina $\mathtt{Spec}(\sqrt{2})$ a množina $\mathtt{Spec}(2 + \sqrt{2})$ tvoria rozklad množiny prirodzených čísel.

69. Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby množiny $\mathtt{Spec}(\alpha), \mathtt{Spec}(\beta)$ tvorili rozklad množiny prirodzených čísel.

70. Dokážte, že výraz

$$\left\lceil \frac{2x+1}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{2x+1}{4} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2x+1}{4} \right\rfloor$$

nadobúda jednu z hodnôt $\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil$. Zistite, kedy ktorú.

71.

1. Dokážte, že pre $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : \quad \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$
2. Pre ktoré $x \in \mathbb{R}_0^+ : \quad \left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil \ne \lceil \sqrt{x} \rceil$?

72. Nájdite hodnotu:

$$\lfloor en!\,(n+1)^2 \rfloor \mod n$$

Hľadať sumu s celými časťami možno v niektorých prípadoch previesť na nájdenie počtu celých čísel v istých intervaloch. V tom prípade pozor na posledný interval, môže byť kratší a treba ho riešiť ako špeciálny prípad.

73. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k=1}^{n} \lceil \lg k \rceil - \lfloor \lg k \rfloor$
2. $\sum_{0 \le k < m} \left\lfloor x + \frac{k}{m} \right\rfloor$

74. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k=1}^{n} \lceil \lg k \rceil$
2. $\sum_{k=1}^{2^n} \lfloor \lg k \rfloor$
3. $\sum_{k=0}^{2^n} 2^{\lfloor \lg k \rfloor}$
4. $\sum_{k=1}^{2^n} \lfloor \lg k \rfloor^2 / 2^{\lfloor \lg k \rfloor}$

Pri sumách s celými časťami možno vo výraze $\lfloor k/2 \rfloor$ rozlíšiť k podľa parity a rátať dve osobitné sumy. Teda

$$\sum_{k} \lfloor k/2 \rfloor a_k = \sum_{k \text{ pár}} \tfrac{k}{2} a_k + \sum_{k \text{ nepár}} \tfrac{k-1}{2} a_k$$

Niekedy je vhodnejšie najprv nahradiť výraz $\lfloor k/2 \rfloor$ výrazom $k/2$ a dopočítať "chybovú" sumu:

$$\sum_{k} \lfloor k/2 \rfloor a_k = \sum_{k} \tfrac{k}{2} a_k - \tfrac{1}{2} \sum_{k \text{ nepár}} a_k$$

Pozri ďalej príklady v časti o kombinatorike.

75. Nájdite súčet $\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{k+1} \lfloor k/2 \rfloor$

76. Nájdite súčet $\sum_{k=0}^{n} \lceil \arctan(k - n/2) \rceil$

77. Nájdite integrály:

1. $\int_0^n \lfloor x \rfloor \{x\}\, dx$
2. $\int_0^n \lceil x \rceil \{x\}\, dx$
3. $\int_0^n x \{x\}\, dx$
4. $\int_0^{\sqrt{n}} x^3 \{x^2\}\, dx$
5. $\int_0^n \sum_{k=1}^{n} \{kx\}\, dx$

78. Nájdite vyjadrenie T_n pre $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} T_0 &= \text{ľub.} \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil T_n &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor T_{n-1} + 1, \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

79. Dokážte, že pre $m, n \in \mathbb{Z}^+, x \in \mathbb{R}$: $\sum_{0 \leq k < n} \left\lfloor \frac{x + mk}{n} \right\rfloor = \sum_{0 \leq k < m} \left\lfloor \frac{x + nk}{m} \right\rfloor$

4. Kombinatorické sumy

V tejto kapitole budú $m, n, k \ldots$ označovať celé čísla, zatiaľčo $a, b, r, x, y, \ldots$ čísla reálne.

4.1. Základné vzťahy

<u>Kombinačné číslo</u> je definované

$$\binom{a}{k} = \frac{a^{\underline{k}}}{k!} \text{ pre } k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, a \in \mathbb{R}$$

$$\text{Pre } k \in \mathbb{Z}, k < 0 \text{ je } \binom{a}{k} = 0$$

<u>Binomická veta:</u>

$$(a+b)^n = \sum_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \text{ pre } n \in \mathbb{N}_0, a, b \in \mathbb{R},$$

$$(a+b)^r = \sum_k \binom{r}{k} a^k b^{r-k}, \text{ pre } r, a, b \in \mathbb{R}, |a| < |b|,$$

$$\text{špeciálne } (1+x)^r = \sum_k \binom{r}{k} x^k, \text{ pre } r, x \in \mathbb{R}, |x| < 1$$

80. Dokážte tvrdenia:

1. $\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1}$
2. $\frac{a}{k}\binom{a-1}{k-1} = \binom{a}{k}, \quad k > 0$
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0$, pozor: tento vzťah neplatí, ak n je záporné alebo necelé !

81. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
2. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
3. $\sum_{k=0}^{n} (2k+1)\binom{n}{k}$
4. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$, pozor na $n = 0$!
5. $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$
6. $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

82. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$
2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}$
4. $\sum_{k=0}^{n} (k^2-k+1)\binom{n}{k}$
5. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(m-1)^{n-k}$

83. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{8}{k^2+2k}\binom{\binom{k+1}{2}}{2}$
2. $\sum_{k=3}^{n} \frac{8}{k^2-2k}\binom{\binom{k}{2}}{2}$
3. $\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k^2-k-1}\binom{2\binom{k}{2}}{k^2-k-2}$
4. $\sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$
5. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} / \binom{n}{k}$
6. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} / \binom{n}{k}$

7. $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}$

8. $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$

9. $\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k \binom{2n+1}{k}^3$

84. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k} \binom{n}{2k}$

2. $\sum_{k} \binom{n}{2k+1}$

3. $\sum_{k} \binom{n}{4k}$

85. Dokážte, že pre $m, n, l \in \mathbb{Z}, 0 \leq l < m, \alpha \in \mathbb{C}$ platí (e je Eulerovo, π Ludolfovo číslo a i komplexná jednotka):

$$m \sum_{k} \alpha^{mk+l} \binom{n}{mk+l} = \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{\frac{-2\pi i l \nu}{m}} \left(1 + \alpha e^{\frac{2\pi i \nu}{m}}\right)^n$$

86. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k} 3^k \binom{n}{2k}$

2. $\sum_{k} (-1)^k 2^k \binom{n}{4k+1}$

87. $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{m}{n}\binom{n-k}{k-m}$. Dokážte !

4.2. Konvolúcie a negácie

<u>VanderMondova konvolúcia:</u>

$$\sum_{k} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_0, a, b \in \mathbb{R}$$

88. Nájdite súčty:

1. $\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}$

2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

3. $\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2(n-k)!^2}$

4. $\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k}\binom{n-k}{j}$

5. $\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k+j}\binom{m}{j}$

6. $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2$

7. $\sum_{k=n}^{m} (-1)^{k+n} \binom{k}{n}\binom{m}{k}$

89. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k} \binom{n}{2k}$

2. $\sum_{k} \binom{n}{2k+1}$

3. $\sum_{k} \binom{n}{4k}$

90. Nájdite súčet $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}$

91. Nech $m \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$. Nájdite diferenciu a neurčitú sumu funkcií $f(k)$

1. $\displaystyle\binom{x+k}{m}$
2. $\displaystyle\binom{x+k}{m+k}$

92. Nájdite súčty:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{m}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{m+k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k\binom{k}{m}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{m}H_k$

Negáciou horného indexu rozumieme formulu

$$\binom{a}{k} = (-1)^k\binom{k-a-1}{k}$$

93. Dokážte, že $\displaystyle\binom{a}{k} = (-1)^k\binom{k-a-1}{k}$

94. Nájdite súčty:

1. $\displaystyle\sum_{k\le m}\binom{r}{k}(-1)^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{x-k}{n-k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{x-k}{m-k}, \quad m > n$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-n}(-1)^k\binom{m}{n+k}, \quad m \ge n \ge 0$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{a-k}{m}$

95. Nájdite súčty:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{x}{n-k}\binom{y+k}{k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{x-k}{n-k}\binom{y}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{x-k}{n-k}\binom{y+k}{k}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{x}{n-k}\binom{x+k}{k}$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{x-k}{n-k}\binom{x}{k}$
6. $\displaystyle\sum_{k}\binom{a+n-k-1}{n-k}\binom{b+k-1}{k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{m}{m-p+k}\binom{n+k}{k}$
8. $\displaystyle\sum_{k} k^2\binom{n}{k}^2$

96. Nájdite súčty:

1. $\displaystyle\sum_{k}\sum_{p}(-1)^p\binom{n}{k}\binom{n}{p-k}\binom{2n-1-p}{n-p}$
2. $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k+n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}^2, \qquad n \ge m$
3. $\displaystyle\sum_{k}\sum_{p}\binom{k-n-1}{k}\binom{k+p-n-1}{k+p}\binom{p-n-1}{p}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{q}\binom{p}{k}\binom{m+p-k}{m-k}\binom{n}{m+p-k}, \qquad q = \min(m,p)$

97. Nájdite súčty:

1. $\displaystyle\sum_{k}\binom{k}{k-n}\binom{m}{m-k}, \quad m \ge n$
2. $\displaystyle\sum_{k=n}^{m}\binom{k-1}{n}\binom{m}{k}.k, \quad m \ge n$

3. $\displaystyle\sum_{k=n}^{m}\binom{k+1}{n}\binom{m}{k}\frac{1}{k+1}, \quad m \geq n$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\min(m,n)}\frac{1}{(k!)^2(n-k)!\,(m-k)!}$

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{m+k}{m-1}$

6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{m+k}{m-1}$

4.3. Duplicitné formuly a Newtonove rady

Platí, že

$$\binom{2n}{n} = \binom{-1/2}{n}(-4)^n$$

98. Nájdite súčty:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 8^k \binom{-1/2}{2k} \Big/ \binom{4k}{2k}$

2. $\displaystyle\sum_{k}\binom{k}{\lfloor k/2\rfloor}0.3^{2\lfloor k/2\rfloor+2}$

3. $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\binom{-k}{k}\left(\frac{3}{8}\right)^{2k}$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k-1}{k-1}\left(-\frac{1}{8}\right)^{k}$

99. Nájdite súčet $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{\underline{m}}\binom{n}{k}$

100. Dokážte, že $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^{\underline{m}}\binom{n}{k} = (-1)^n n!\,(m = n)$.

Ak $P(k)$ je polynóm, tak ho možno zapísať ako polynóm klesajúcich faktoriálnych mocnín v tvare

$$P(k) = \sum_{p=0}^{m} a_p k^{\underline{p}}$$

Potom

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}P(k) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{p=0}^{m}a_p k^{\underline{p}} = \sum_{p=0}^{m}a_p\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^{\underline{p}} = (-1)^n n!\,a_n$$

101. Nájdite súčty:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^n$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^n$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^{n+1}$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(-k)^{n+1}}{k!\,(n-k)!}$

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2k}{n}$

6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2k+1}{n}\frac{n}{2k+1}$

7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{r-sk}{n}$

8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}(n-k)^n$

4.4. Ďalšie úlohy

102. Nájdite súčty:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{n-1}{k-1}\Big/\binom{n+q}{k}$

2. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{(2k-n)!}{(k-1)!}\binom{k}{n}\Big/\binom{2k-n}{k}$

3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n-k}\binom{n+k}{n} / \binom{2n}{k}$

4. $\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}$

103. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$
2. $\sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$
3. $\sum_{k} \binom{n}{k} \lfloor k/2 \rfloor$
4. $\sum_{k} \binom{n}{k} \lfloor k/2 \rfloor$
5. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} / \lceil (k+1)/2 \rceil$
6. $\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{n+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}{n}$
7. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\lceil \frac{n+k}{2} \right\rceil$
8. $\sum_{k\geq 1} \binom{n}{\lfloor \log_m k \rfloor}, \qquad m > 1$

104. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{n-k-1} - \binom{n+k}{n-k+1} + \binom{n+k}{n-k}$
2. $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k+1}{k} + \binom{2k}{k-1}$
3. $\sum_{k} (-1)^k \binom{n}{k}^2$
4. $\sum_{k} \binom{n+k-1}{k}\binom{-n}{n-k}$
5. $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k}{k-1} 2^{-k}$
6. $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{m} H_k$
7. $\sum_{k} \sum_{l=1}^{n} \binom{2k-l}{2k}$

105. Nájdite súčet $\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$

106. Nájdite súčet $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - \binom{n}{k}}{k}$

107. Nájdite súčty:

1. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1}$
2. $\sum_{k} \binom{n}{k} \frac{k!}{(n+1+k)!}$
3. $\sum_{k} \binom{n-1}{k} n^{-k}.(k+1)!$
4. $\sum_{k} \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$
5. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2k}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$

5. Generujúce funkcie

5.1. Základné vzťahy

Pod generujúcou (vytvárajúcou) funkciou postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ rozumieme formálny rad $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Tento rad má kombinatorický zmysel, preto pokiaľ za z nehodláme dosadzovať, nie je podstatný interval jeho konvergenie. Pre funkcie, ktoré majú polomer konvergencie nenulový, obyčajne koinciduje s Taylorovým radom. Nad generujúcimi funkciami možno vykonávať bežné operácie: Ak $A(z)$, resp. $B(z)$ sú vytvárajúce funkcie pre postupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, resp $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, tak $A(z)+B(z)$ je vytvárajúca funkcia pre $\{a_n+b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $c.A(z)$ je vytvárajúca funkcia pre $\{c.a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $z^k A(z)$ je vytvárajúca funkcia pre postupnosť $\underbrace{0,0,\ldots,0}_{k}, a_0, a_1, \ldots$ a $\dfrac{A(z)-a_0-a_1z-\cdots-a_{k-1}z^{k-1}}{z^k}$ je vytvárajúca funkcia pre $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\ldots$.

108. Nájdite vytvárajúcu funkciu $A(z)$ pre $\{a_n\}$, ak

1. $a_n = 1$
2. $a_n = (0 \leq n \leq N)$
3. $a_n = \alpha^n$
4. $a_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}$
5. $a_n = \dbinom{\alpha}{n}$
6. $a_n = (-1)^n$
7. $a_n = \dfrac{\alpha^n}{(n-1)!}, \quad n > 0$

Niektoré užitočné Taylorove rady:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n = (1+z)^\alpha$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \ln(1+z)$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2}$

109. Nájdite vytvárajúcu funkciu $A(z)$ pre $\{F_{n+3}\}_{n=0}^{\infty}$

Ďalšou užitočnou manipuláciou s vytvárajúcimi funkciami je ich derivovanie a integrovanie. Pritom $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,z^k}A(z)$ je vytvárajúca funkcia pre $\{n^{\underline{k}} a_n\}_{n=0}^{\infty}$. $\displaystyle\int_0^z A(z)\,dz$ je vytvárajúca funkcia pre $\left\{\dfrac{a_n}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$.

110. Nájdite vytvárajúcu funkciu $A(z)$ pre $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, ak

1. $a_n = n$
2. $a_n = n(n-1)$
3. $a_n = n^2$
4. $a_n = n^3$
5. $a_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{\alpha}{n}$
6. $a_n = n\dbinom{\alpha}{n}$

111. Nájdite vytvárajúcu funkciu $A(z)$ pre $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, ak

1. $a_n = \sin n\alpha$
2. $a_n = \cos n\alpha$

112. Nájdite n-tý člen postupnosti vytváranej funkciou $A(z)$

1. $(q+pz)^m$
2. $\sqrt{1-z}$
3. $\dfrac{1}{1-z}$
4. $z^m(1-z)^m$
5. $\left(1+\dfrac{z^2}{2}\right)^{-m}$
6. $\ln(1-z)$
7. $\dfrac{1}{1+z^2}$
8. $\dfrac{1+z}{1+z^2}$

113. Nájdite n-tý člen postupnosti vytváranej funkciou $A(z)$

1. $\dfrac{1}{2+3z^2}$
2. e^{-2z^2}
3. $\ln(1+2z^2)$
4. $\ln(2+2z^2)$
5. ze^{z^2}
6. $\operatorname{arctg} z$
7. $\arcsin z$
8. $\ln(z+\sqrt{1+z^2})$
9. $\ln(z-\sqrt{1+z^2})$

114. Nech $A(z)$ je vytvárajúca funkcia pre postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{n}$. Nájdite vytvárajúcu funkciu pre postupnosti

1. $a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \ldots$
2. $0, a_0, 0, a_1, 0, a_2, \ldots$
3. $a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0 \ldots$
4. $0, a_1, 0, a_3, 0, a_5 \ldots$
5. $a_0, a_2, a_4, a_6, \ldots$
6. $a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots$

115. Nech $A(z)$ je vytvárajúca funkcia pre postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{n}$. Dokážte, že vytvárajúca funkcia pre postupnosť jej čiastočných súčtov je $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^n = \dfrac{1}{1-z}A(z)$

116. Nájdite vytvárajúce funkcie pre postupnosti

a) $1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
b) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$
c) $1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots$
d) $0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots$
e) $1, 0, 3, 0, 5, 0, \ldots$
f) $0, 2, 0, 4, 0, 6, \ldots$
g) $1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$
h) $2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$

117. Nájdite vytvárajúce funkcie:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_{2n} z^n$
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_{2n+1} z^n$
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_{4n} z^n$
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_{4n+1} z^n$
5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_{4n+2} z^n$
6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} F_{4n+3} z^n$

118. Nájdite vytvárajúce funkcie:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{\alpha}{2n} z^n$
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{\alpha}{2n+1} z^n$
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{\alpha}{4n} z^n$
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{\alpha}{4n+1} z^n$
5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{\alpha}{4n+2} z^n$
6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dbinom{\alpha}{4n+3} z^n$

119. Nájdite vytvárajúcu funkciu $A(z)$ pre postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{1}{n} & n > 0 \end{cases}$$

120. Nájdite vytvárajúcu funkciu $A(z)$ pre postupnosť $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$

121. Vypočítajte:

1. $\sum\limits_{n\geq 0} H_n \left(\dfrac{e-1}{e}\right)^n$
2. $\sum\limits_{n\geq 0} H_n \dfrac{1}{10^n}$

122. Definujme $n_{\rceil} = n! \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$. Nájdite $\hat{S}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n_{\rceil} \dfrac{z^n}{n!}$.

123. Určte: $[z^n]\ \ln^2(1-z)$

5.2. Lineárne diferenčné rovnice

Lineárnou diferenčnou rovnicou k-teho rádu s nulovou pravou stranou a počiatočnými podmienkami nazývame systém

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha_0 \\ y_1 &= \alpha_1 \\ &\vdots \\ y_{k-1} &= \alpha_{k-1} \\ a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \cdots + a_k y_{n-k} &= 0, \quad n \geq k \end{aligned}$$

Lineárnu diferenčnú rovnicu (LDR) tvorí posledná rovnosť (rekurencia). Prvých k rovností tvorí počiatočné podmienky. Polynóm $a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k x^0$ nazývame jej charakteristickým polynómom.

124. Nech $a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \cdots + a_k y_{n-k} = 0$ je LDR bez počiatočných podmienok a λ je koreňom jej charakteristického polynómu. Dokážte, že

1. $\{\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$ vyhovuje LDR.
2. ak $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ vyhovujú LDR, tak aj $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$ jej vyhovuje.
3. ak $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ vyhovuje LDR, tak aj $\{c.a_n\}_{n=0}^{\infty}$ jej vyhovuje.
4. množina postupností vyhovujúcich LDR tvorí vektorový podpriestor priestoru všetkých postupností.
5. ak λ je násobný koreň charakteristického polynómu, tak aj $\{n\lambda^n\}_{n=0}^{\infty}$ vyhovuje LDR.

Riešenie LDR s nulovou pravou stranou a počiatocnými podmienkami:

Keďže postupnosti vyhovujúce LDR tvoria vektorový priestor, existuje jeho báza $h_1(n), \ldots, h_m(n)$. To riešenie LDR, ktoré vyhovuje aj počiatočným podmienkam, je potom vhodnou lineárnou kombináciou bázy, t.j.

$$\forall n: y_n = A_1 h_1(n) + A_2 h_2(n) + \cdots + A_m h_m(n)$$

Koeficienty $A_1, \ldots, A_m$ dourčíme dosadením hodnôt $n = 0, \ldots, k-1$ tak, aby boli splnené počiatočné podmienky.

Veta: Priestor riešení LDR s nulovou pravou stranou je k-rozmerný a ak $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sú rôzne komplexné (!) korene jej charakteristického polynómu s násobnosťami $n_1, \ldots, n_m$, tak jeho bázou sú postupnosti

$$\begin{matrix} \lambda_1^n, & n\lambda_1^n, & \ldots & n^{n_1}\lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m^n, & n\lambda_m^n, & \ldots & n^{n_m}\lambda_m^n \end{matrix}$$

Dosadenie $n = 0, \ldots, k-1$ vedie preto na sústavu k lineárnych rovníc o k neznámych.

125. Riešte rekurencie:

1. $a_1 = 10$, $a_2 = 16$
   $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}, \quad n \geq 3$
2. $a_1 = 2$, $a_2 = 12$
   $a_{n+2} - 4a_n = 0, \quad n \geq 1$
3. $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 27$
   $a_{n+3} - 3a_{n+2} - a_{n+1} + 3a_n = 0, \quad n \geq 1$
4. $a_1 = 2$, $a_2 = 4$
   $a_{n+2} + a_n = 0, \quad n \geq 1$
5. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$
   $a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad n \geq 1$
6. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$
   $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0, \quad n \geq 0$
7. $a_1 = -1$, $a_2 = 2$
   $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0, \quad n \geq 1$

126. (náročné) Riešte rekurenciu:

$$a_1 = 14,\ b_1 = -6$$
$$a_{n+1} = 3a_n + b_n$$
$$b_{n+1} = -a_n + b_n, \quad n \geq 1$$

Lineárnou diferenčnou rovnicou k-teho rádu s nenulovou pravou stranou a počiatočnými podmienkami nazývame systém

$$y_0 = \alpha_0$$
$$y_1 = \alpha_1$$
$$\vdots$$
$$y_{k-1} = \alpha_{k-1}$$
$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \cdots + a_k y_{n-k} = f(n), \quad n \geq k$$

Lineárnu diferenčnú rovnicu s nenulovou pravou stranou (LDRP) tvorí posledná rovnosť (rekurencia). Prvých k rovností tvorí počiatočné podmienky. Funkcia $f(n)$ je pravou stranou.

127. Nech $g(n)$ je ľubovoľné pevné (tzv. partikulárne) riešenie LDRP bez počiatočných podmienok. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. Ak $h(n)$ je ľubovoľné riešenie LDR, ktorá vznikne z pôvodnej LDRP anulovaním pravej strany, tak $g(n) + h(n)$ je riešením LDRP.
2. Každé riešenie LDRP možno zapísať v tvare $g(n) + h(n)$ pre vhodné riešenie $h(n)$ anulovanej LDR.

Riešenie LDR s nulovou pravou stranou a počiatocnými podmienkami:

1. Nájsť všeobecné riešenie príslušnej anulovanej LDR $h(n) = A_1 h_1(n) + \cdots + A_k h_k(n)$
2. Nájsť ľubovoľné partikulárne riešenie LDRP $g(n)$. Všeobecným riešením LDRP je potom $g(n) + h(n) = g(n) + A_1 h_1(n) + \cdots + A_k h_k(n)$.
3. Dosadením postupne $n = 0, \ldots, k-1$ dostaneme systém k rovníc o k neznámych, vyriešením ktorého nájdeme koeficienty $A_1, \ldots, A_k$.

Hľadanie partikulárneho riešenia:

Veta: Ak pravá strana $f(n)$ LDRP je v tvare DOPLNIŤ !!!

128. Nájdite všeobecné riešenie rekurencií:

1. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 1$
2. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = n$
3. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 2^n$
4. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 3.2^n$

129. Riešte rekurencie

1. $y_0 = \frac{3}{2}$
   $y_{n+1} - 3y_n = 4n - n^2, \quad n \geq 0$
2. $y_0 = -1,\ y_1 = -4$
   $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 2n^2 + 2, \quad n \geq 0$
3. $y_0 = 1,\ y_1 = \frac{5}{2}$
   $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 5y_n = 8n, \quad n \geq 0$
4. $a_1 = -9,\ a_2 = 45$
   $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27.5^n, \quad n \geq 1$

130. Riešte rekurenciu pre $b \in \mathbb{R}_0^+$:

$$y_0 = 1$$
$$y_{n+1} = 2y_n + b^n, \quad n \geq 0$$

131. Riešte rekurenciu:

$$g_0 = 1$$
$$g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + \cdots + ng_0, \quad n > 0$$

132. Nájdite vytvárajúcu funkciu $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

1. $a_0 = 2,\ a_1 = 5$
   $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad n \geq 0$
2. $a_0 = 2,\ a_1 = 4,\ a_2 = 7$
   $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n, \quad n \geq 0$
3. $a_0 = 3,\ a_1 = 7$
   $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0, \quad n \geq 0$
4. $a_0 = 0,\ a_1 = -2$
   $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 3.2^{n+2}, \quad n \geq 0$
5. $a_0 = 0,\ a_1 = 1$
   $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + \frac{4.2^n}{(n+2)!}, \quad n \geq 0$

133. Určte:

1. $[z^n]\ \frac{2-2z}{4z^2-4z+1}$
2. $[z^n]\ \frac{1+z^2}{(1-z)(1+z)}$
3. $[z^n]\ \frac{3-17z}{21z^2-10z+1}$
4. $[z^n]\ \frac{1+z+z^2}{1-z-z^2}$
5. $[z^n]\ \frac{2+3z^2}{1-z-z^2}$

134. Nájdite $\sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{z^n}{n!}$.

5.3. Konvolúcie

Ak $A(z)$ je vytvárajúca funkcia pre postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $B(z)$ je vytárajúca funkcia pre postupnosť $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, tak vytvárajúca funkcia pre postupnosť $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right\}_{n=0}^{\infty}$ je $A(z)B(z)$, čiže

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n$$

Exponenciálnou vytvárajúcou funkciou pre postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazývame formálny mocninný rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$. Ak $A(z)$ je exponenciálna vytvárajúca funkcia pre postupnosť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $B(z)$ je exponenciálna vytárajúca funkcia pre postupnosť $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, tak exponenciálna vytvárajúca funkcia pre postupnosť $\left\{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right\}_{n=0}^{\infty}$ je $A(z)B(z)$, čiže

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \frac{z^n}{n!}$$

135. (náročné) Využitím vlastností konvolúcií nájdite sumy:

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n-k)}$
2. $\sum_{k=0}^{n} H_k H_{n-k}$
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k)¡$
4. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k}{n-k}$
5. $\sum_{k=0}^{n} F_k F_{n-k}$
6. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k F_{n-k}$

136.

1. Nájdite vytvárajúcu funkciu pre $\left\{\binom{k}{m}\right\}_{k\geq 0}$.

2. Pomocou toho určte:

$$\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{k_1}\sum_{k_3=0}^{k_2}\cdots\sum_{k_s=0}^{k_{s-1}}\binom{k_s}{m}$$

137. Určte vytvárajúcu funkciu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{kF_{k-1}-F_k}{k!}z^k$$

138. Vypočítajte

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(kF_{k-1}-F_k)(n-k)_{|}$$

139. Nájdite súčet:

$$\sum_{m>0}\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_m=n\\ n_i>0}}1$$

140. Nájdite súčet:

$$\sum_{m>0}\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_m=n\\ n_i\geq 0}}F_{n_i}$$

141. Nájdite súčet:

$$\sum_{m>0}\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_m=n\\ n_i\geq 0}}1$$

142. Určte: $[w^m z^n]\ \dfrac{\ln(1+z)}{1-wz}$

143. Dokážte, že

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}}\ln\frac{1}{1-z}=\sum_{n\geq 0}(H_{m+n}-H_m)\binom{m+n}{n}z^n$$

144. Nájdite $S(z)$, ak

$$[z^n]\ S(z)=\sum_k\binom{r}{k}\binom{r}{n-2k}$$

145. Nájdite $A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, ak

$$\begin{aligned}a_0&=0,\ a_1=1\\(n+1)a_{n+1}&=a_0a_n+a_1a_{n-1}+\cdots+a_na_0,\quad n\geq 1\end{aligned}$$

146. (náročné) Riešte rekurenciu (Návod: využite exponenciálnu vytvárajúcu funkciu):

$$\begin{aligned}g_0&=0\\g_1&=1\\g_n&=-2ng_n+\sum_k\binom{n}{k}g_kg_{n-k},\quad n>1\end{aligned}$$

147. (náročné) Vypočítajte $\sum_{k=0}^{n} \binom{n-2k}{k} \left(-\frac{4}{27}\right)^k$ (Pomôcka: $z^3 - z^2 + \frac{4}{27} = \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 \left(z - \frac{1}{3}\right)$).

5.4. Ďalšie úlohy

148. Riešte rekurencie:

1. $H(0) = 1$
   $H(n) = 3H(n-1)$
2. $H(0) = 2$
   $H(n) = H(n-1) + n - 3$
3. $H(0) = 0$
   $H(n) = -H(n-1) + 1$
4. $H(0) = 1$
   $H(n) = -H(n-1) + 2$
5. $H(0) = 1$
   $H(n) = 2H(n-1) + 1$
6. $H(0) = 0,\ H(1) = 1$
   $H(n) = 4H(n-2)$
7. $H(0) = 2$
   $H(n) = (n+2)H(n-1)$
8. $H(0) = -1,\ H(1) = 0$
   $H(n) = 8H(n-1) - 16H(n-2)$

149. Riešte rekurencie:

1. $H(0) = 0,\ H(1) = 1,\ H(2) = 1,\ H(3) = 2$
   $H(n) = 5H(n-1) - 6H(n-2) - 4H(n-3)$
2. $H(0) = 1,\ H(1) = 0,\ H(2) = 0$
   $H(n) = 3H(n-2) - 2H(n-3)$

150. Riešte rekurencie:

1. $a_0 = 1$
   $a_{n+1} = a_n + 2$
2. $a_1 = 1$
   $a_{n+1} = 3a_n + 1$
3. $a_0 = 0,\ a_1 = 1$
   $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$
4. $a_0 = 1,\ a_1 = 0$
   $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 5$
5. $a_1 = 1$
   $a_{n+1} - a_n = n$

151. Riešte rekurencie:

1. $a_0 = a_1 = 1$
   $a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2} + 5$
2. $a_0 = 0,\ a_1 = a_2 = 1$
   $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$
3. $a_0 = a_1 = 1,\ a_2 = 2$
   $a_n = a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$
4. $a_0 = a_2 = 0,\ a_1 = 2$
   $a_n = 9a_{n-1} - 24a_{n-2} + 20a_{n-3}$
5. $a_0 = a_1 = 0,\ a_2 = 10,\ a_3 = 0$
   $a_n = 13a_{n-1} - 60a_{n-2} + 112a_{n-3} - 64a_{n-4}$
6. $a_0 = 1,\ a_1 = 2$
   $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2}$
7. $a_0 = 0,\ a_1 = 10$
   $a_n = 14a_{n-1} - 49a_{n-2}$
8. $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$
   $a_n = 9a_{n-1} - 15a_{n-2} + 7a_{n-3}$

152. Riešte rekurencie:

1. $a_0 = a_1 = 1,\ a_2 = 0$
   $a_n = 13a_{n-1} - 40a_{n-2} + 36a_{n-3}$
2. $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$
   $a_n = -2a_{n-2} - a_{n-4}$
3. $a_0 = a_1 = a_2 = 0,\ a_3 = 5$
   $a_n = 10a_{n-1} - 37a_{n-2} + 60a_{n-3} - 36a_{n-4}$
4. $a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_3 = c$
   $a_{n+3} = 3a_{n+1} - 2a_n$
5. $a_1 = 3,\ a_2 = 15,\ a_3 = 41$
   $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 6n^2 - 4n - 17$
6. $a_1 = \cos\alpha,\ a_2 = \cos 2\alpha$
   $a_{n+2} - 2\cos\alpha a_{n+1} + a_n = 0$

6. Asymptotická analýza

Praktickou pomôckou pri asymptotickej analýze sú Taylorove rady pre $x \to 0$, táto podmienka je PODSTATNÁ !!!

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + O(x^{n+1})$
2. $(1+x)^\alpha = 1 + x + \dfrac{x(x-1)}{2} + \cdots + \dbinom{\alpha}{n} x^n + O(x^{n+1})$
3. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$
4. $\ln(1+x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + O(x^{n+1})$

V ďalšom budeme vždy uvažovať $n \to \infty$.

153. Nájdite asymptotické vyjadrenie s presnosťou $O(n^{-4})$ pre

1. $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
2. $\dfrac{n}{n-1}$
3. $n^2 \sqrt[n]{e}$
4. $n^2 \ln\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)$
5. $\dfrac{n}{n-1} \ln \dfrac{n}{n-1}$
6. $\ln\left(1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right)$

Ďalšie užitočné asymptotiky sú

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O(n^{-6})$$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{5140n^3} + O(n^{-4})\right)$$

154. Nájdite asymptotické vyjadrenia s uvedenou presnosťou

1. $H_n + \dfrac{1}{n^4} + \dfrac{1}{n^6} + \dfrac{1}{n^8}, \quad O(n^{-6})$
2. $\ln^2\left(1 + \dfrac{1}{n}\right), \quad O(n^{-4})$
3. $\dfrac{1}{n+1}, \quad O(n^{-4})$
4. $\ln(1+n), \quad O(n^{-4})$
5. $\dfrac{1}{n^2+1}, \quad O(n^{-4})$
6. $\ln(n^2 - 3n + 2), \quad O(n^{-4})$
7. $\dfrac{1-n}{1+n^2}, \quad O(n^{-5})$
8. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad O(n^{-3})$

155. Nájdite asymptotické vyjadrenia s uvedenou presnosťou

1. $\sqrt{n^2+n} - n, \quad O(n^{-3})$
2. $\dfrac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n}, \quad O(n^{-3})$
3. $\ln\left(n + \sqrt{n^2-1}\right), \quad O(n^{-4})$
4. $\ln\left(2n - \sqrt{n^2+1}\right), \quad O(n^{-4})$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} H_k, \quad O(n^{-4})$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} H_k, \quad O(n^{-4})$
7. $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - \sqrt{2n}, \quad O(n^{-2})$
8. $\left(n^3 - n^2 + \dfrac{n}{2}\right) e^{1/n} - \sqrt{n^6+1}, \quad O(n^{-3})$

156. Nájdite asymptotické vyjadrenie pre

1. $\ln n!$
2. $\dbinom{2n}{n}$

3. $\binom{3n}{n}$

4. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad O(n^{-3})$

5. $\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}}, \quad O(n^{-3})$

157. Nájdite asymptoticky rovný odhad pre

1. $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

2. $n^{1/3}\left((n+1)^{2/3}-(n-1)^{2/3}\right)$

3. $(n+1)^n$

Výsledky

! ! ! Výsledky sú neúplné a bez záruky ! ! !

$\boxed{1}$ **6.** V druhom kroku indukcie využite, že $\sqrt{n} + 1/\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1}$ **7.** V druhom kroku indukcie upravte $\frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+2} = (\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}) + (\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1})$. $\boxed{8}$ **1.** $y_n = 2^n + 3$, zvoľte substitúciu $g_n = y_n - 3$ **2.** $T_n = F_n + 1$, zvoľte substitúciu $g_n = T_n - 1$ **3.** $z_n = 2^n + n^2$, zvoľte substitúciu $g_n = z_n - n^2$ **4.** $R_n = F_n + n$, zvoľte substitúciu $g_n = R_n - n$ $\boxed{11}$ **1.** $\frac{n^2+n+2}{2}$ **3.** $n^2 - n + 2$ **3.** $g(n) = 2^n\alpha + (2^n - 1)\beta + (2^{n+1} - 2 - n)\gamma + 6(2^n - 1) - 4n - n^2)\delta$ $\boxed{16}$ **1.** $T_n = \dfrac{3}{2n}$ $\boxed{30}$ **1.** $\frac{7}{2}$ **2.** $\frac{2}{3}$ $\boxed{31}$ **1.** $1 - \frac{1}{n+1}$ **2.** $-\frac{1}{6} - \frac{1}{9n+6}$ **4.** $(n+1)! - 1$ **5.** 0 $\boxed{32}$ **1.** $\frac{n^3}{2(n+1)}$ **2.** $\sqrt{n}$ **4.** $1 - \frac{1}{(n+2)!}$ **5.** $\frac{1}{2}$ $\boxed{33}$ **1.** $2H_n - \frac{n+1}{n}$ **2.** $H_n^{(2)} - \frac{1}{n}$ **3.** $\frac{n^2-2n}{2} + H_n$ **4.** $H_n - \frac{2n}{n+1}$ **5.** $\frac{n^2-7n}{2} + 4H_n$ **6.** $\frac{2n^2+9n+1}{6}$ $\boxed{34}$ **1.** $\frac{3n(n+1)}{2}$ **2.** $\binom{n}{2} + H_n$ **3.** $2H_n + n - 3$ **4.** $1 - \frac{1}{n+1}$ **5.** $H_{3n} - \frac{1}{3}H_n$ **6.** $H_n - H_{2n}$ $\boxed{35}$ **1.** $(-1)^n\lceil\frac{n}{2}\rceil$ $\boxed{36}$ $\frac{e^2-1}{2}$ $\boxed{38}$ **1.** $n(H_n - 1)$ **2.** $n(H_n - 1)$ **3.** $\frac{n}{2}\left((n+1)\left(H_n - \frac{1}{2}\right) + 1\right) = \binom{n+1}{2}\left(H_{n+1} - \frac{1}{2}\right)$ **4.** $\binom{n+1}{2}\left(H_{n+1} - \frac{3}{2}\right) = \frac{n}{2}\left((n+1)\left(H_n - \frac{3}{2}\right) + 1\right)$ $\boxed{41}$ **1.** nH_{n^2} $\boxed{42}$ **1.** $T_n = \frac{1}{H_n}$ **2.** $T_n = 1$ $\boxed{47}$ **a)** $mk^{\underline{m-1}}$, úlohu treba riešiť osobitne pre $m > 0$ a $m < 0$ **b)** 2^k **c)** $\frac{1}{k+1}$ **e)** $(c-1)c^k$ $\boxed{48}$ $1996!$ $\boxed{49}$ **a)** $\frac{k^{\overline{m+1}}}{m+1}$ **b)** H_k **c)** 2^k **e)** $\frac{c^k}{c-1}$ $\boxed{50}$ $k(H_k - 1)$ $\boxed{76}$ $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ $\boxed{81}$ **1.** 2^n **2.** $n2^{n-1}$ **4.** $(n = 0)$ $\boxed{82}$ **3.** 3^n $\boxed{88}$ **3.** $\binom{2n}{n}^2$ **7.** $(m = n)$ $\boxed{92}$ **1.** $\binom{x+n+1}{m} - \binom{x}{m+1}$ **2.** $\binom{x+n+1}{m+n} - \binom{x}{m-1}$ **3.** $n\binom{n}{m+1} - \binom{n+1}{m+2}$ **4.** $\binom{n}{m+1}H_n - \frac{1}{m+1}\binom{n+1}{m}$ $\boxed{94}$ **1.** $\binom{m-r}{m}$ **2.** $\binom{x+1}{n}$ **3.** $\binom{x+1}{m} - \binom{x-n}{m-n-1}$ $\boxed{95}$ **1.** $\binom{x-y-1}{n}$ **2.** $\binom{x-y}{n}$ **3.** $\binom{x+y+1}{n}$ **4.** $(-1)^n$ **5.** 0 $\boxed{98}$ **2.** 0.125 $\boxed{102}$ **4.** 4^n $\boxed{104}$ **7.** 2^{n-1} $\boxed{111}$ **1.** $\frac{(\sin\alpha)z}{z^2-2z\cos\alpha+1}$ **2.** $\frac{(1-z\cos\alpha)z}{z^2-2z\cos\alpha+1}$ $\boxed{122}$ $\frac{1}{1-z}e^{-z}$ $\boxed{123}$ 0, pre $n = 0$, $\frac{2H_{n-1}}{n}$ inak $\boxed{125}$ **1.** $3^n + 7$ **2.** $2^n(2 + (-1)^n)$ **3.** $3^n + (-1)^{n+1} - 1$ **4.** $(-2-i)i^n - (2-i)(-i)^n = 2\sin\frac{n\pi}{2} - 4\cos\frac{n\pi}{2}$ **5.** n **6.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ **7.** $n(-1)^n$ $\boxed{126}$ $a_n = n2^{n+1} + 5.2^n$, $b_n = -(2n+1)2^n$ $\boxed{129}$ **1.** $2.3^n + \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} - \frac{1}{2}$ **2.** $2^n + (-1)^n - n^2 - n - 3$ **3.** $\frac{5^n}{2} - n^2 + \frac{n+1}{2}$ **4.** $2(-4)^n - 3.2^n + 5^n$ **1.** $\frac{2-5z}{1-5z+6z^2}$ **2.** $\frac{2-4z+z^2}{1-4z+5z^2-2z^3}$ **5.** $\frac{e^{2z}-1-z}{1-z-z^2}$ **1.** $(n+2)2^n$ **2.** $\frac{1}{2}(1 + (-1)^n) + n$ $\boxed{135}$ **1.** 0, pre $n = 0$, $\frac{2H_{n-1}}{n}$ inak **2.** $(n+1)(H_n^2 - H_n^{(2)}) - 2n(H_n - 1)$ $\boxed{144}$ $(1+z^2)^r(1+z)^r$ $\boxed{145}$ $\operatorname{tg} z$ $\boxed{146}$ $g_0 = 0$, $g_1 = 1$, $g_{2n} = -\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{n}4^n(2n)!$, $n > 0$, $g_{2n+1} = 0$, $n > 0$ $\boxed{156}$ **5.** $1 + \frac{2}{n^2} + O(n^{-3})$ $\boxed{157}$ **1.** $\frac{1}{e}$ **2.** $\frac{4}{3}$ **3.** en^n